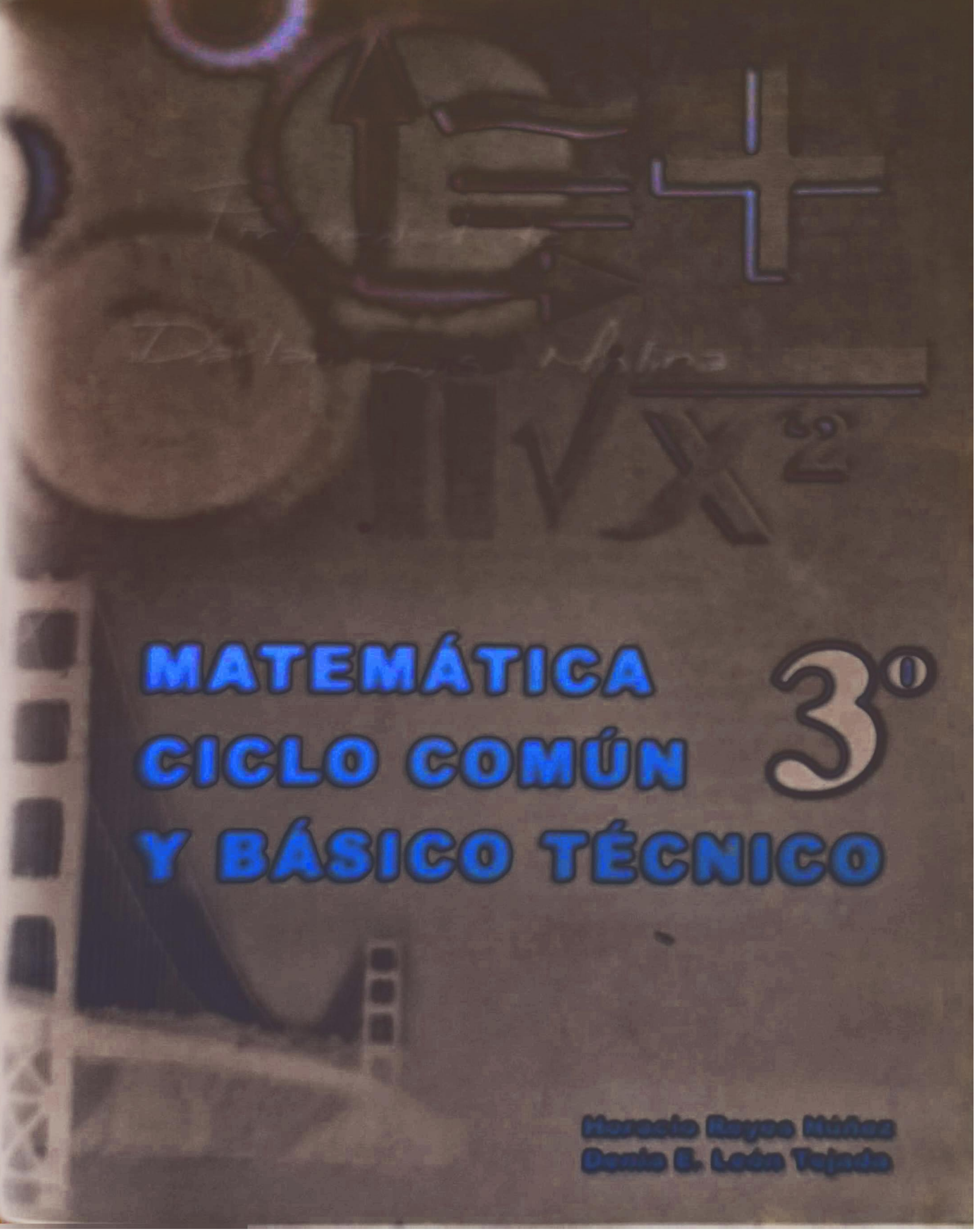


The background of the cover is a dark, textured collage of various mathematical symbols and geometric shapes. Visible elements include a large circle, a crescent moon, a plus sign, a multiplication sign, a division sign, a less-than-or-equal-to sign, a square root symbol, and a power of 2. There are also faint, stylized letters and numbers scattered throughout.

MATEMÁTICA

CICLO COMÚN

Y BÁSICO TÉCNICO

3°

Horacio Reyes Núñez
Denia E. León Tejeda

Primera edición

Primera impresión: febrero 2003

**Redacción, edición e impresión: Horacio Reyes Núñez,
Denia E. León Tejada**

Diseño de Portada: David Díaz

Diseño y diagramación: Anayhansy Reyes Nasser

Derechos reservados

**Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, sin
autorización de los autores**

MATEMÁTICA
CICLO COMÚN
Y BÁSICO TÉCNICO **3^o**

Moracio Reyes Núñez
Denia E. León Tejada

Presentación Preliminar de la Nueva Edición

La presente edición del libro de Matemática para el Tercer Curso del Ciclo Común y Básico Técnico se ha desarrollado conforme la Segunda Versión de los Rendimientos Básicos del Área Científico Tecnológica, basados en las estrategias de método dialéctico estructural analizados por el Comité Hondureño de Educación Matemática (C.H.E.M.), y también de acuerdo con las sugerencias hechas en 1999 por una comisión de matemática del Colegio de Profesores de Educación Media de Honduras (C.O.P.E.M.H) Su contenido está estructurado en ocho (8) unidades de estudio:

- Productos Notables. Factorización de Expresiones Algebraicas.
- Expresiones Algebraicas Racionales.
- Expresiones Algebraicas Radicales.
- Ecuaciones Lineales y Cuadráticas.
- Relaciones Algebraicas
- Ecuaciones Lineales en dos Variables
- Polígono y Círculo.
- Área y Volumen de algunos Sólidos Geométricos.

*Presentación
al Estudiante
con explicación
mejorada
Introducción al
Capítulo I con multiplicación
de factores*

Los temas de cada unidad, se inician con sus respectivos objetivos; con una exposición teórica básica; con ejemplos y problemas desarrollados y justificados paso a paso, que convierten a esta obra en autodidáctica y, finaliza con una serie de ejercicios y problemas cuidadosamente seleccionados y propuestos en 47 tareas que contienen las respuestas a los números impares.

Al finalizar cada unidad, se presenta una Guía Complementaria de Estudio con respuesta a los ejercicios y problemas, la que servirá tanto al profesor como al alumno, de instrumento de sistematización, reforzamiento y evaluación del contenido estudiado en cada unidad.

Agradeceremos a nuestros colegas y lectores, su colaboración en la validación de las respuestas de esta obra, así como también, las sugerencias pertinentes que nos conduzcan a mejorar este trabajo.

Horacio Reyes Núñez

Denia E. León Tejada

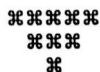
Autores

Tegucigalpa M.D.C., Honduras, C.A., Febrero 2,003

INDICE

	Pág.
PRESENTACION	
UNIDAD 1. Productos Notables. Factorización de Expresiones Algebraicas.	
1.1. Productos notables o especiales	1
1.2. Factor Común. Propiedad distributiva	5
1.3. Factorización por agrupación	6
1.4. Factorización de diferencia de cuadrados y diferencia de cubos	8
1.5. Trinomio de segundo grado. Trinomio cuadrado perfecto. Factorización	11
1.6. Factorización de un trinomio cuadrático. Tanteo	13
1.7. Factorización de un trinomio cuadrático por completación	18
1.8. Teorema del Residuo y del Factor	24
1.9. Factorización de polinomios de grado mayor que 2 que contienen factores de la forma ($x \pm a$). Utilización del teorema del factor	26
UNIDAD 2. Expresiones Algebraicas Racionales	
2.1. Expresiones algebraicas racionales. Simplificación	31
2.2. Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales	34
2.3. Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas	37
2.4. Adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales	39
2.5. Operaciones combinadas de expresiones algebraicas racionales	42
UNIDAD 3. Expresiones Algebraicas Radicales.	
3.1. Expresiones algebraicas radicales. Simplificación	48
3.2. Adición y sustracción de expresiones algebraicas radicales	51
3.3. Multiplicación y división (racionalización) de expresiones algebraicas	53
UNIDAD 4. Ecuaciones Lineales y Cuadráticas.	
4.1. Ecuaciones de primer grado con coeficientes racionales y con signos de agrupación. Despejes. Aplicaciones	60
4.2. Ecuaciones cuadráticas. Conceptualización y componentes. Solución analítica de la ecuación cuadrática. Aplicaciones. Problemas	68
UNIDAD 5. Relaciones Algebraicas.	
5.1. Sistema de coordenadas cartesianas	83
5.2. Noción de relación	85
5.3. Fórmulas de la distancia y del punto medio. El círculo	88
5.4. Relación lineal. La línea recta. Intersectos y gráfica. Pendiente	96
5.5. La Ecuación de la recta: Pendiente – Ordenada en el Origen	102
5.6. Ecuación de la recta Punto – Pendiente	104
5.7. Condiciones de paralelismo. Rectas Paralelas	107
5.8. Condiciones de perpendicularidad. Rectas perpendiculares	109

5.9. Relación cuadrática. La parábola. Puntos importantes: intersección, vértice, concavidad, eje de simetría, dominio, rango y gráfica	114
UNIDAD 6. Ecuaciones Lineales en Dos Variables	
6.1. Ecuaciones en dos variables. Gráficas y conceptualización	124
6.2. Solución de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables. Método de reducción, eliminación o adición y sustracción. Aplicaciones	130
6.3. Método de sustitución	135
6.4. Método de igualación	137
UNIDAD 7. Polígonos y Círculo.	
7.1. Polígonos y sus elementos. Clasificación. Ángulos internos y externos de un polígono	141
7.2. Perímetro y área de polígonos regulares	147
7.3. El círculo y la circunferencia. Elementos. Partes geométricas	152
7.4. Longitud de la circunferencia	156
7.5. Área del círculo. Área del anillo circular y del sector circular.	158
UNIDAD 8. Área y Volumen de algunos Sólidos Geométricos.	
8.1. Concepto y Elementos de poliedros: prisma, paralelepípedo, pirámide, área lateral y total. Volumen	165
8.2. Sólidos geométricos redondos. El cilindro recto de revolución. Área lateral. Área total. Volumen	176
8.3. El cono circular de revolución. Área lateral. Área total. Volumen	178
8.4. La esfera. Área y volumen	180
RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMEROS IMPARES	185
BIBLIOGRAFÍA	195



UNIDAD 1. PRODUCTOS NOTABLES. FACTORIZACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. PRODUCTOS NOTABLES O ESPECIALES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Determinar procedimientos para encontrar el producto de factores dados, sin necesidad de efectuar todo el proceso de la multiplicación.
- ♦ Interpretar los productos notables como casos abreviados de multiplicación para obtener el producto de ciertos factores.
- ♦ Plantear y desarrollar ejercicios aplicando los productos notables.

Existe cierto tipo especial de productos, llamados **productos notables** que son muy frecuentes en Algebra. El estudiante deberá no solo verificar cada uno de ellos efectuando las operaciones indicadas y dando las razones correspondientes, sino que también memorizándolas en forma tal que pueda reconocer tanto el producto a partir de los factores, como los factores a partir del producto.

Los llamados **productos notables**, en realidad son casos abreviados para obtener en forma rápida el producto de ciertos factores. Los siguientes, son algunos de estos productos notables

1. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

"El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades".

Ejemplos: Hallar:

a) $(2x + 3)(2x - 3)$

$$(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2$$

$$= 4x^2 - 9$$

$$= 4x^2 - 9$$

Remarcar respuestas

... Es el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

... Planteado como una diferencia de los cuadrados de ambas cantidades.

... Desarrollando la operación que quedó indicada

... Resp.

... ¿Qué es esto?

... ¿Porqué?

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

b) $(3x^2y - 2zm^3)(3x^2y + 2zm^3)$

$$= (3x^2y)^2 - (2zm^3)^2$$

$$= 9x^4y^2 - 4z^2m^6$$

$$= 9x^4y^2 - 4z^2m^6$$

2.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

"El cuadrado de la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de la 1ª cantidad, más el doble producto de la 1ª por la 2ª, más el cuadrado de la 2ª cantidad".

Ejemplos: Hallar:

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

... Aplicando la regla correspondiente.

... Desarrollando operaciones indicadas.

... Resp.

... ¿Qué se hizo?

b) $(5x^2y - 2z^2)^2 = (5x^2y)^2 + 2(5x^2y)(2z^2) + (2z^2)^2$

Uno de los dos está equivocado

$$= 25x^4y^2 + 20x^2yz^2 + 4z^4$$

$$= 25x^4y^2 + 20x^2yz^2 + 4z^4$$

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

3. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

“El cuadrado de la diferencia de dos cantidades, es igual al cuadrado de la 1ª cantidad, menos el doble producto de la 1ª por la 2ª, más el cuadrado de la 2ª cantidad”.

Ejemplos: Hallar:

a) $(2x + y^2)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(y^2) + (y^2)^2$
 $= 4x^2 - 4xy^2 + y^4$
 $= 4x^2 - 4xy^2 + y^4$

... Aplicando la regla correspondiente.

... Desarrollando operaciones indicadas.

... Resp.

b) $(4x^2y - 3z^3)^2 = (4x^2y)^2 - 2(4x^2y)(3z^3) + (3z^3)^2$
 $= 16x^4y^2 - 24x^2yz^3 + 9z^6$
 $= 16x^4y^2 - 24x^2yz^3 + 9z^6$

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

4. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

“El cubo de la suma de dos cantidades, es igual al cubo de la 1ª cantidad más el triplo del cuadrado de la 1ª por la 2ª, más el triplo de la 1ª por el cuadrado de la 2ª, más el cubo de la 2ª cantidad”.

Ejemplos: Hallar:

a) $(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$
 $= 8x^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) + 27y^3$
 $= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

... Aplicando la regla correspondiente.

... Operando.

... Resp.

b) $(x^2y + 3y^2)^3 = (x^2y)^3 + 3(x^2y)^2(3y^2) + 3(x^2y)(3y^2)^2 + (3y^2)^3$
 $= x^6y^3 + 3(x^4y^2)(3y^2) + 3(x^2y)(9y^4) + 27y^6$
 $= x^6y^3 + 9x^4y^4 + 27x^2y^5 + 27y^6$

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

5. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

“El cubo de la diferencia de dos cantidades, es igual al cubo de la 1ª cantidad, menos el triplo del cuadrado de la 1ª por la 2ª, más el triplo de la 1ª por el cuadrado de la 2ª, menos el cubo de la 2ª cantidad”.

Ejemplos: Hallar:

a) $(2x - 5y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 - (5y)^3$
 $= 8x^3 - 3(4x^2)(5y) + 3(2x)(25y^2) - 125y^3$
 $= 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$

... Aplicando la regla correspondiente.

... Desarrollando las potencias y operando.

... Resp.

b) $(3x^2 + 2y^2)^3 = (3x^2)^3 - 3(3x^2)^2(2y^2) + 3(3x^2)(2y^2)^2 - (2y^2)^3$... ¿Qué se hizo?

$= 27x^6 - 3(9x^4)(2y^2) + 3(3x^2)(4y^4) - 8y^6$... ¿Qué se hizo?

$= 27x^6 - 54x^4y^2 + 36x^2y^4 - 8y^6$... Resp.

6. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

"El producto de la suma de dos cantidades por el cuadrado de la 1ª cantidad más el producto de las dos, más el cuadrado de la 2ª cantidad, es igual al cubo de la 1ª más el cubo de la 2ª cantidad".

Ejemplos: Hallar:

a) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$
 $= (3x + 2y)[(3x)^2 - 3x(2y) + (2y)^2]$
 $= (3x)^3 + (2y)^3$
 $= 27x^3 + 8y^3$

... Aplicando la regla correspondiente.
 ... ¿Qué se hizo?
 ... Resp.

b) $(2x^2 + 5y^3)(4x^4 - 10x^2y^3 + 25y^6)$
 $= (2x^2 + 5y^3)[(2x^2)^2 - 10x^2y^3 + (5y^3)^2]$
 $= (2x^2)^3 + (5y^3)^3$
 $= 8x^6 + 125y^9$

... ¿Qué se hizo?
 ... ¿Qué se hizo?
 ... Resp.

7. $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

"El producto de la diferencia de dos cantidades por el cuadrado de la 1ª cantidad más el producto de las dos, más el cuadrado de la 2ª cantidad, es igual al cubo de la 1ª menos el cubo de la 2ª cantidad".

Ejemplos: Hallar:

a) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
 $= (2x - 3y)[(2x)^2 + 2x(3y) + (3y)^2]$
 $= (2x)^3 - (3y)^3$
 $= 8x^3 - 27y^3$

... Aplicando la regla correspondiente.
 ... ¿Qué se hizo?
 ... Resp.

b) $(5x - 4y^2)(25x^2 + 20xy^2 + 16y^4)$
 $= (5x - 4y^2)[(5x)^2 + 5x(4y^2) + (4y^2)^2]$
 $= (5x)^3 - (4y^2)^3$
 $= 125x^3 - 64y^6$

... Aplicando la regla correspondiente.
 ... ¿Qué se hizo?
 ... Resp.

8. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

"El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de los tres términos, más el doble producto de cada término y el que le sigue".
falta mencionar que se toman en los signos

Ejemplos: Hallar:

a) $(x + 2y - 3z)^2$
 $= [(x + 2y + (-3z))]^2$
 $= x^2 + (2y)^2 + (-3z)^2 + 2x(2y) + 2x(-3z) + 4y(-3z)$
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$

... Escribiendo el trinomio como una suma.
 ... Aplicando la regla correspondiente.
 ... Realizando las operaciones indicadas.
 ... Resp.

b) $(2a - 3b - 4c)^2$
 $= [(2a + (-3b) + (-4c))]^2$
 $= (2a)^2 + (-3b)^2 + (-4c)^2 + 2(2a)(-3b) + 2(2a)(-4c) + 2(-3b)(-4c)$
 $= 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 12ab - 16ac + 24bc$

... ¿Qué se hizo?
 ... ¿Qué se hizo?
 ... Resp.

A continuación se presenta un cuadro resumen de los casos estudiados en los productos notables o productos especiales:

1. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
2. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
4. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
5. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
6. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
7. $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
8. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

GUIA DE ESTUDIO No. 1

Calcule los productos indicados en:

1. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$
2. $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
3. $(2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$
4. $(7x + 3)^2 = 49x^2 + 42x + 9$
5. $(5x - 2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2$
6. $(3x + 5y)^2$
7. $(6x + 5y)^2 = 36x^2 + 60xy + 25y^2$
8. $(5x + 3y)^2$
9. $(3z^2 - 4t^3)^2 = 9z^4 - 24z^2t^3 + 16t^6$
10. $(2r^2 - 3s^3)^2$
11. $(5x^3 + 3u^2)^2 = 25x^6 + 30x^3u^2 + 9u^4$
12. $(2s^2 + 5w^3)^2$
13. $(x + 2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
14. $(3x + 5y)^3$
15. $(2x + x^2)^3 = 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6$
16. $(3x^2 + x)^3$
17. $(5x - y)^3 = 125x^3 - 75x^2y + 15xy^2 - y^3$
18. $(6x - 5y)^3$
19. $(7x - 2)^3 = 343x^3 - 294x^2 + 84x - 8$
20. $(5x - 4)^3$
21. $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$
22. $(x + 7)(x - 7)$
23. $(3x + 5)(3x - 5) = 9x^2 - 25$
24. $(2x + 3)(2x - 3)$
25. $(2x - 5y)(2x + 5y) = 4x^2 - 25y^2$
26. $(3x + 4y)(3x - 4y)$
27. $(7x + 6y)(7x - 6y) = 49x^2 - 36y^2$
28. $(8x - 5y)(8x + 5y)$
29. $(2a^2 - 3b^2)(2a^2 + 3b^2) = 4a^4 - 9b^4$
30. $(2a^2 + 5b^2)(2a^2 - 5b^2)$
31. $(5a^2 + 7b^3)(5a^2 - 7b^3)$
32. $(6a^3 + 7b^2)(6a^3 - 7b^2)$
33. $\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$
34. $\left(\frac{3a}{4} - \frac{4b}{3}\right)\left(\frac{3a}{4} + \frac{4b}{3}\right)$
35. $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{3c}{4d}\right)\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3c}{4d}\right)$
36. $\left(\frac{5a}{4b} + \frac{2b}{3a}\right)\left(\frac{5a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right)$
37. $(x + y + z)^2$
38. $(2x - y + z)^2$
39. $(x - y + 3z)^2$
40. $(2x + y - z)^2$
41. $(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})$
42. $(x + 2\sqrt{x})(x - 2\sqrt{x})$
43. $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})(\sqrt{2x} + \sqrt{3y})$
44. $(\sqrt{2x} - 3\sqrt{5y})(\sqrt{2x} + 3\sqrt{5y})$
45. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
46. $(x^2 - 5x + 25)(x + 5)$
47. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
48. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
49. $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
50. $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$

1.2. FACTOR COMUN. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Determinar el procedimiento para factorizar un polinomio mediante la aplicación de la propiedad distributiva y asociativa.
- ♦ Plantear y resolver ejercicios aplicando la propiedad distributiva y asociativa para su factorización.
- ♦ Reconocer y factorizar una diferencia de cuadrados.
- ♦ Reconocer y factorizar una diferencia de cubos y una suma de cubos.

DEFINICION: El proceso conocido como **factorización** consiste en expresar un polinomio dado como el producto indicado de sus factores (polinomios), en el conjunto de números que se especifique.

La factorización puede considerarse como el proceso inverso de lo que se llama **simplificación**; por ejemplo, dado el polinomio $x(3x + 5)(x + 2)$, lo “simplificamos” efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos semejantes obteniéndose así el polinomio:

$$3x^3 + 11x^2 + 10x$$

debemos en cierto modo invertir los pasos seguidos en la simplificación hasta obtener:

$$x(3x + 5)(x + 2)$$

Examinando cuidadosamente el proceso de simplificar productos indicados, lograremos obtener ciertas técnicas para tratar los problemas de este tipo. Al factorizar polinomios en una variable, nuestro objetivo es obtener factores polinómicos del menor grado posible; el mismo objetivo trataremos de lograr cuando el polinomio tenga varias indeterminadas.

El **factor común** no es más que la aplicación de la propiedad distributiva en la factorización de polinomios. El primer caso a estudiar es el de un polinomio que tiene un factor común. Como dejamos apuntado, el obtener un factor común implica la aplicación de la propiedad distributiva, también la propiedad simétrica de la igualdad y en muchos casos la asociativa.

Ejemplos: Factorizar sobre el conjunto Z, los siguientes polinomios:

- | | |
|--|---|
| <p>1. $4t^2 - 8t^4 = 4(t^2 - 2t^4)$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= 4t^2(1 - 2t^2)$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= 4t^2(1 - 2t^2)$</p> | <p>... Propiedad distributiva en los coeficientes numéricos. Siempre se busca el mayor factor común de los coeficientes.</p> <p>... Prop. distributiva en las indeterminadas. El factor común será la indeterminada de menor exponente en el polinomio.</p> <p>... Factorizado ... Resp.</p> |
| <p>2. $6a^3b^2 - 3a^2b^3 = 3(2a^3b^2 - a^2b^3)$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= 3a^2b^2(2a - b)$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= 3a^2b^2(2a - b)$</p> | <p>... Propiedad distributiva en los coeficientes.</p> <p>... Prop. distributiva en las indeterminadas.</p> <p>... Factorizado ... Resp.</p> |
| <p>3. $6y^4 - 8y^2 + 10y = 2(3y^4 - 4y^2 + 5y)$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= 2y(2y^3 - 4y + 5)$</p> <p style="margin-left: 40px;">$= 2y(2y^3 - 4y + 5)$</p> | <p>... Propiedad distributiva en los coeficientes</p> <p>... Prop. distributiva en las indeterminadas.</p> <p>... Factorizado ... Resp.</p> |

IMPORTANTE:

Una vez determinado el factor común, el otro factor, es decir, el que va dentro del paréntesis, se calcula dividiendo cada término del polinomio por el factor común encontrado. En algunos casos hay necesidad de aplicar más de una vez la propiedad distributiva, como en los siguientes ejemplos:

4. $5(x - 2) + (x^2 - 2x) = 5(x - 2) + x(x - 2)$... Factorizando el segundo término aplicando la propiedad distributiva.
 $= (x - 2)(5 + x)$... Aplicando nuevamente la propiedad distributiva. La primera vez se empleó, para obtener $x(x-2)$ de $(x-2x)$ y la segunda, para escribir $5(x-2) + x(x-2)$ como el producto indicado de $(x-2)(5+x)$.
5. $(x^2 + 3x) - 2(x + 3) = x(x + 3) - 2(x + 3)$... Propiedad distributiva
 $= (x + 3)(x - 2)$... Factor común: $(x + 3)$
 $= (x + 3)(x - 2)$... Factorizado ... Resp.
6. $(x^2 - 2x) + (yx - 2y) = x(x - 2) + y(x - 2)$... Propiedad distributiva en ambos términos
 $= (x - 2)(x + y)$... Factor común: $(x - 2)$
 $= (x - 2)(x + y)$... Factorizado ... Resp.

Como puede observarse, en los ejemplos del 1 al 3 se encontró como factor común un monomio, por eso algunos autores le llaman **factor común monomio** y en los ejemplos del 4 al 6, el factor común fue un polinomio, por eso le llaman **factor común polinomio**. Conviene aclarar que en un polinomio a factorizar puede haber más de dos términos, pero el procedimiento es el mismo.

Ejemplos: Factorizar:

1. $(3x^2 + 3xy) - (5xy + 5y^2) + (2x + 2y) = 3x(x + y) - 5y(x + y) + 2(x + y)$
 $= (x + y)(3x - 5y + 2)$... Resp.
2. $(ur + rv) - (u + s) + (2u + 2v) = r(u + v) - s(u + v) + 2(u + v)$
 $= (u + v)(r - s + 2)$... Resp.

1.3. FACTORIZACION POR AGRUPACION

En este tipo de factorización se emplea la propiedad asociativa y la distributiva. Se verá que después de asociar términos, que el procedimiento para factorizar es idéntico al explicado antes. Es importante hacer notar que la agrupación depende de la disposición de los términos y por tanto, no se recomienda hacerla arbitrariamente.

Ejemplos: Factorizar:

1. $x^2 + 4x + 3x + 12 = (x^2 + 4x) + (3x + 12)$... Propiedad asociativa. Asociando el 1° con 2° y el 3° con el 4° término.
 $= x(x + 4) + 3(x + 4)$... Factor común monomio.
 $= (x + 4)(x + 3)$... Factor común polinomio: $(x + 4)$
 $= (x + 4)(x + 3)$... Factorizado ... Resp.

2. $xz - 8x + x - 8 = (xz + x) - (8z + 8)$

$$= x(z + 1) - 8(z + 1)$$

$$= (z + 1)(x - 8)$$

$$= (z + 1)(x - 8)$$

... Asociando 1° con 3° y 2° con el 4° término. Obsérvese el cambio de signo en ésta última asociación.

... Factor común monomio

... Factor común polinomio: $(z + 1)$

... Factorizado ... Resp.

3. $2st + 6 - 3s - 4t = (2st + 6) - (3s + 4t)$

$$= 2(st + 3) - (3s + 4t)$$

$$= (2st - 3s) - (4t - 6)$$

$$= s(2t - 3) - 2(2t - 3)$$

$$= (2t - 3)(s - 2)$$

$$= (2t - 3)(s - 2)$$

... Asociación 1° con 2° y el 3° con el 4° término.

... Factor común en el primer término. *No hay factor común en todo el polinomio;* luego, esta asociación no sirve. Tratemos con otra asociación, como la siguiente:

... Asociando 1° con 3° y el 2° con el 4° término. Obsérvese el cambio de signo en ésta última asociación.

... Factor común monomio.

... Factor común polinomio $(2t - 3)$

... Factorizado ... Resp.

De lo hecho hasta ahora, **no debemos concluir** que todos los polinomios de esta clase pueden ser factorizables por este método. Algunos polinomios parecidos sencillamente no pueden factorizarse independientemente de la agrupación que se haga. Ejemplo:

4. Trate de factorizar el polinomio: $2st + 6 - 3s - 2t$

IMPORTANTE: Si un paréntesis va precedido de un signo negativo (-), todo lo que se escriba dentro de él, cambiará su signo, ¿Porqué?. Véanse los ejemplos 2 y 3 de esta sección.



*

GUIA DE ESTUDIO No. 2

Factorizar las siguientes proposiciones:

1. $x^2 + 2xb$

2. $3t - 6$

3. $ab + ac$

4. $x^3 - x$

5. $15a^2 - 30ba$

6. $x^2 - x^4$

7. $3x(xz - yz)$

8. $ax - ay$

9. $a^3 - 2a^2 + 3a$

10. $a^3b^3 + a^2b^4$

11. $4abc^2 + 8ab^2c - 12a^2bc$

12. $18x^2y - 10xy + 6xy^2$

13. $a(x + 1) - 3(x + 1)$

14. $(x + y)u - v(x + y)$

15. $2x(3y - 5) - y(3y - 5) + 2z(3y - 5)$

Factorizar las siguientes proposiciones: (podrán haber casos en que no es posible factorizar)

16. $ax + 2a + 3x + 6$

17. $ux + vx + uy + vy$

18. $2ab + a^2 + 2b + 2a$

- | | | |
|---|---------------------------------------|---------------------------|
| 19. $3rs - 3s^2 + 5r - 5s$ | 20. $5x + 3y - 3y - 5$ | 21. $3a + 15b - 3a - 15b$ |
| 22. $a^2 - ab + ac - bc$ | 23. $p^2 - pq + mp - mq$ | 24. $2st + 6 - 3s - 2t$ |
| 25. $6m - 9n + 21nx - 14mx$ | 26. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$ | 27. $1 + a + 3ab + 3b$ |
| 28. $x^2 - 9a^4 + 6a^2b + 1 + 2x - b^2$ | 29. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$ | 30. $xy + 3x + 2y + 6$ |
| 31. $xy + 4x - 2y - 8$ | 32. $x^2 - 2x + ax - 2a$ | 33. $a^2 + 2a + ab + 2b$ |
| 34. $2x^2 - 8x + 3xy - 12y$ | 35. $xy - x + 5y - 5$ | 36. $y^2 - yb + ya - ab$ |
| 37. $12 + 8y - 3x - 2xy$ | 38. $2y - 6 - xy + 3x$ | 39. $a^3 + 2a^2 + a + 2$ |
| 40. $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ | 41. $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$ | 42. $y^3 + 2y^2 - 4y - 8$ |
| 43. $3x + 2y + 6 + xy$ | 44. $5a + 3y + ay + 15$ | 45. $6x + 5y + xy + 30$ |
| 46. $ax - 12 - 3x + 4a$ | 47. $ax + by + ay + bx$ | 48. $ax - 8 - 2a + 4x$ |
| 49. $cd - 12 - 4ad + 3c$ | 50. $ca - 2b + 2a - cb$ | 51. $ac - bd - ad + bc$ |

 *

1.4. FACTORIZACION DE DIFERENCIA DE CUADRADOS Y DIFERENCIA DE CUBOS

Se puede obtener ideas para factorizar una *diferencia de cuadrados* estudiando la multiplicación así:

$$\begin{array}{r} (x+y)(x-y) \\ x^2 - xy \\ + xy - y^2 \\ \hline x^2 - y^2 \end{array}$$

entonces deducimos que:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Luego: *una diferencia de cuadrados se factoriza como el producto de las sumas de las raíces cuadradas por la diferencia de las mismas.*

Ejemplos: Factorizar los siguientes polinomios:

$$\begin{array}{cc} 1. & 4x^2 - 9 = \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ & 2x \quad 3 \end{array}$$

$$= (2x + 3)(2x - 3)$$

$$= (2x + 3)(2x - 3)$$

... Son las raíces cuadradas de ambos términos.

... Factorizando como el producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas.

... Factorizado ... Resp.

$$\begin{array}{cc} 2. & 16x^2 - 36y^2 = \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ & 4x \quad 6y \end{array}$$

... Son las raíces cuadradas de ambos términos.

$$= (4x + 6y)(4x - 6y)$$

... Producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas.

$$= (4x + 6y)(4x - 6y)$$

... Factorizado ... Resp.

$$3. \quad 8y^2 - 18 = 2(4y^2 - 9)$$

... Propiedad Distributiva.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2y & 3 \\ = 2(2y + 3)(2y - 3) \end{array}$$

... Raíces cuadradas de los dos términos.

... Factorizado ... Resp.

$$4. \quad 2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16)$$

... Propiedad Distributiva.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & 4 \\ = 2(x + 4)(x - 4) \end{array}$$

... Raíces cuadradas de los dos términos.

... Factorizado ... Resp.

De la misma manera, se puede obtener ideas para factorizar una *diferencia de cubos*, así:

$$\begin{array}{r} (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ x^3 + x^2y + xy^2 \\ - x^2y - xy^2 - y^3 \\ \hline x^3 \qquad \qquad - y^3 \end{array}$$

entonces decimos que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \quad y;$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Luego, *una diferencia de cubos se factoriza como el producto de la diferencia de las raíces cúbicas de los dos términos, por el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces cúbicas, mas el cuadrado de la segunda raíz.*

Ejemplos: Factorizar los siguientes polinomios:

$$1. \quad 8x^3 - 1 =$$

... Raíces cúbicas de ambos términos.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2x & 1 \end{array}$$

$$= (2x - 1)[(2x)^2 + (2x)(1) + 1^2]$$

... Aplicando la regla anterior, indicando operaciones y resolviéndolas.

$$= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

... Factorizado ... Resp.

$$= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$2. \quad 27a^3 - 64b^3 =$$

... Raíces cúbicas de ambos términos.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 3a & 4b \end{array}$$

... ¡¡Trate de finalizarlo!!

¡ INVESTIGAR COMO SE FACTORIZA UNA SUMA DE CUBOS !

$$3. \quad \begin{array}{c} 8x^3 + 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = ?$$

$$4. \quad \begin{array}{c} 27a^3 + 64b^3 \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = ?$$

GUIA DE ESTUDIO No. 3

Factorizar, empleando la propiedad distributiva cuando sea necesario, los siguientes polinomios:

1. $4x^2 - 1$

2. $16x^2 - 4$

3. $81 - 9y^2$

4. $\frac{1}{4}a^2 - 9$

5. $125x^2 - 5y^2$

6. $\frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{16}y^2$

7. $24y^2 - 6z^2$

8. $3x^2 - 3$

9. $4(2x^2 - 16)$

10. $1 - \frac{a^2}{25}$

11. $\frac{a^2}{36} - \frac{81}{49}$

12. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2z^4}{100}$

13. $(x + 1)^2 - 16x^2$

14. $(x + y)^2 - a^2$

15. $(x - 2a)^2 - 4x^2$

16. $(2x - 1)^2 - 25$

Factorizar los siguientes polinomios:

17. $27a^3 - b^3$

18. $a^3 + 125$

19. $8x^3 - 27y^3$

20. $1 - 343n^3$

21. $64f^3 - 729$

22. $1 + 8c^3$

23. $216m^3n^3 - 64$

24. $a^3b^3 + c^3$

25. $512 - 125s^3$

26. $1 + 729x^6$

27. $27m^3 - 64n^9$

28. $a^3b^3c^3 - 512$

29. $h^3g^6b^9 - h^3r^3n^9$

30. $1000d^3 + 1$

31. $216 - x^{12}$

1.5. TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Determinar procedimientos para reconocer el trinomio de segundo grado y sus propiedades; también buscar procedimientos para factorizarlo.
- ♦ Identificar las características del trinomio de cuadrado perfecto y sus propiedades, así como también las características para factorizarlo.
- ♦ Plantear y resolver problemas aplicando las propiedades del trinomio de segundo grado, lo mismo que problemas de factorización.
- ♦ Factorizar un trinomio cuadrático por tanteo e identificar los diferentes casos.

Un *trinomio de segundo grado*, también llamado *trinomio cuadrático*, es un polinomio de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

donde $a, b, c, \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Ejemplos: Son polinomios cuadráticos:

$$P(x) = 5x^2 + 2x + 3;$$

$$Q(x) = 2x^2 - 0.3x - 5;$$

$$R(x) = \frac{1x^2}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{2};$$

$$S(x) = 2.1x^2 + 3.4x - 3.6;$$

$$T(x) = 6.8x^2 + 3.4x - 2;$$

$$2x^2 - 5x - 1$$

$$\pi x^2 - 2\pi x - \pi$$

$$\frac{2x^2}{3} + \frac{1x}{4} + \frac{3}{7}$$

$$-x^2 + 3x - \frac{1}{5}$$

$$-x^2 - 3.2x - \sqrt{2}$$

En estos dos grupos de polinomios, puede observarse lo siguiente:

- ♦ Algunos autores suelen escribir un polinomio, anteponiéndole una letra mayúscula y un paréntesis y dentro de él, escriben la letra o letras del polinomio. Véase el grupo de polinomios de la izquierda. Otros autores simplemente los escriben en forma directa como los del grupo de la derecha.
- ♦ Los trinomios cuadráticos cuando tienen sus tres términos se les llama: **completos**.
- ♦ Todos los coeficientes deben ser números reales.
- ♦ Todos los exponentes de la variable de los términos del trinomio, deben ser números enteros no negativos.
- ♦ En todo trinomio cuadrático, su coeficiente principal debe ser diferente de 0 ($a \neq 0$).
- ♦ En un polinomio cuadrático, puede faltar el término lineal y/o el independiente o constante y, cuando esto sucede se le llama **incompleto**.
- ♦ Todo trinomio cuadrático **completo y ordenado en forma descendente**, se dice que está en su **forma canónica**.
- ♦ En algunos libros, los autores suelen escribir la forma general de un trinomio cuadrático así:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde $a_2, a_1, a_0, \in \mathbb{R}$ y $a_2 \neq 0$

RECONOCIMIENTO DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO. CONDICIONES Y FACTORIZACION

Para efectuar tal reconocimiento, deben cumplirse las *condiciones* siguientes:

1. Que sea un trinomio escrito en su forma canónica.
2. El primero y último término del trinomio sean positivos y cuadrados perfectos sobre el conjunto **R**.
3. El segundo término del trinomio es el doble producto de las raíces del primero y el tercer término.

Si un polinomio cumple las condiciones anteriores, su factorización será el producto de dos factores idénticos formados por las raíces del primero y del tercer término, en ese orden y separados por el signo que tiene el segundo término del trinomio.

Ejemplos: Reconocer si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos (T.C.P.) y factorizarlos cuando lo sean:

- | | |
|---|---|
| <p>1. $x^2 + 9 + 6x = x^2 + 6x + 9$</p> <div style="margin-left: 40px;"> $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x \quad \quad 3$
 $2(x)(3) = 6x$
 $= (x + 3)(x + 3)$ </div> | <p>... Condición 1.</p> <p>... Condición 2.</p> <p>... Condición 3. Es T.C.P.</p> <p>... Factorizado</p> <p>... Condición 1.</p> <p>... Condición 2.</p> <p>... Condición 3. Es T.C.P.</p> <p>... Factorizado</p> |
| <p>2. $-12st + 9s^2 + 4t^2 = 4t^2 - 12st + 9s^2$</p> <div style="margin-left: 40px;"> $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $= 2t \quad \quad 3s$
 $2(2t)(3s) = 12st$
 $= (2t - 3s)(2t - 3s)$ </div> | <p>... Resp.</p> <p>... Condición 1.</p> <p>... Condición 2.</p> <p>... Condición 3. Es T.C.P.</p> <p>... Factorizado</p> <p>... Resp.</p> |
| <p>3. $16 + x^2 - 6x = x^2 - 6x + 16$</p> <div style="margin-left: 40px;"> $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x \quad \quad 4$
 $2(x)(4) \neq 6x$
 $8x \neq 6x$ </div> | <p>... Condición 1.</p> <p>... Condición 2.</p> <p>... No se cumple la condición 3.</p> <p>... No es T.C.P.</p> |
| <p>4. $2x^2 + 9 - 6x\sqrt{2} = 2x^2 - 6x\sqrt{2} + 9$</p> <div style="margin-left: 40px;"> $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x\sqrt{2} \quad \quad 3$
 $2(x\sqrt{2})(3) = 6x\sqrt{2}$
 $= (x\sqrt{2} - 3)(x\sqrt{2} - 3)$ </div> | <p>... Condición 1.</p> <p>... Condición 2.</p> <p>... Condición 3. Es T.C.P.</p> <p>... Factorizado</p> <p>... Resp.</p> |

IMPORTANTE: Si en un trinomio no se cumple la condición 2, y/o 3, ese trinomio no es T.C.P. Sin embargo, ello no significa que el trinomio no es factorizable, puede serlo pero aplicando una técnica diferente a la propuesta aquí.



Evidentemente, no será factorizable por este sistema, pero podrá serlo empleando otro método. El profesor debe tratar de enseñar a factorizar un T.C.P. sobre el conjunto de los Números Reales **R**.

GUIA DE ESTUDIO No. 4

¿Cuáles de los siguientes polinomios son T.C.P.? Escriba dentro del paréntesis de la derecha un SI o un NO, justificando su respuesta.

1. $x^2 + 2x + 1$ () 2. $x^2 + 2x + 9$ () 3. $6x + 9x^2 + 1$ ()

4. $x^2 - 6x + 9$ () 5. $4x^2 + 12xy + 9y^2$ () 6. $7x^2 - 10x + 7$ ()

7. $\frac{1}{4}y^2 + 4 - 2y$ () 8. $x^2 - 3x + 4$ () 9. $9a^2b^2 + 4x^2 + 12abx$ ()

10. $\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - 3ab$ () 11. $\frac{25}{16}x^2 + \frac{25}{12}xy - \frac{25}{36}y^2$ () 12. $2n^4 + 2\sqrt{10}m^2n^2 + 5m^4$ ()

¿Qué valor debe colocarse dentro del paréntesis para que el trinomio sea un T.C.P.?

13. $t^2 - 6t +$ () 14. () $+ 6y + 9y^2$ 15. $x^2 + 8c +$ () 16. $x^2 - 16x +$ ()

17. () $- 8t + 4t^2$ 18. () $- 10x + x^2$ 19. $x^2 -$ () $x + 25$ 20. $4x^2 -$ () $x + 9$

Comprobar si los siguientes polinomios son T.C.P. sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ y factorizar los que lo sean.

21. $a^2 - 4a + 4$

22. $4x^2 - 4x + 4$

23. $4t^2 + 12t + 9$

24. $y^2 + y + 1$

25. $4z^2 - 20z + 25$

26. $9s^2 + 4t^2 + 6st$

27. $x^2 + 3 - 6x$

28. $2x^2 - 12x + 18$

29. $4x^2 + 9 + 12x$

30. $25x^4 - 10x^2 + 1$

31. $36x^2 - 24xy^4 + 4y^8$

32. $400x^{10} + 40x^5 + 1$

1.6. FACTORIZACION DE UN TRINOMIO CUADRÁTICO. TANTEO

En esta sección utilizaremos una forma especial de factorizar un trinomio cuadrático que no necesariamente son T.C.P. comenzaremos con la factorización de un trinomio cuadrático de la forma:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde $a_2 = 1$

Como ejemplos de estos polinomios tenemos:

$$x^2 + 5x + 6;$$

$$x^2 - 7x + 12;$$

$$x^2 - 8x + 20$$

Ahora se tratará de factorizarlos empleando una técnica usada sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y que algunos autores llaman *factorización por tanteos*.

Ejemplos: Factorizar los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} 1. \quad 6 + x^2 + 5x &= x^2 + 5x + 6 \\ &\downarrow \\ &x \\ &= (x \quad \quad)(x \quad \quad) \end{aligned}$$

$$= (x + \quad)(x + \quad)$$

$$= (x + 3)(x + 2)$$

$$= (x + 3)(x + 2)$$

- ... Escrito en su forma canónica.
- ... Se obtiene la raíz cuadrada del término cuadrático.
- ... Se forman dos factores binomios en los cuales sus primeros términos serán la raíz cuadrada encontrada del término cuadrático.
- ... El signo del primer binomio, será siempre el signo del término lineal. El signo del segundo binomio será siempre el producto del signo del término lineal y del signo del término constante del polinomio en su forma canónica.
- ... Como ambos binomios tienen signos iguales, se buscan dos números cuya **suma** sea igual al coeficiente del término lineal (+5) y cuyo **producto** sea igual al tercer término (+6). Los números son +3 y +2. $2 + 3 = 5$ y $2(3) = 6$.
- ... **Resp.**

$$\begin{aligned} 2. \quad 12 + x^2 - 7x &= x^2 - 7x + 12 \\ &\downarrow \\ &x \\ &= (x - \quad)(x - \quad) \end{aligned}$$

$$= (x - 4)(x - 3)$$

$$= (x - 4)(x - 3)$$

- ... Escrito en su forma canónica.
- ... Raíz cuadrada del término cuadrático.
- ... Dos factores binomios. El signo de primero binomio es (-) porque este signo lo lleva el término lineal. El signo del segundo binomio será (-) ya que " $-x + = -$ ".
- ... Son signos iguales, entonces se buscan dos números cuya **suma** sea (-7) y cuyo **producto** sea (+12). Estos números son (-4) y (-3). Veamos: $(-4) + (-3) = -7$ y $(-4)(-3) = 12$
- ... **Resp.**

$$\begin{aligned} 3. \quad -20 - 8x + x^2 &= x^2 - 8x - 20 \\ &\downarrow \\ &x \\ &= (x - \quad)(x + \quad) \end{aligned}$$

- ... Forma canónica.
- ... Raíz cuadrada de x^2 .
- ... Dos factores binomios. El signo del primero es menos (-) y el del segundo es más (+). Como son signos diferentes, se

$$= (x - 10)(x + 2)$$

$$= (x - 10)(x + 2)$$

$$4. \quad x^2 + 5x - 6 = x^2 + 5x - 6$$

↓

x

$$= (x + \quad)(x - \quad)$$

$$= (x + 6)(x - 1)$$

$$= (x + 6)(x - 1)$$

buscan dos números cuya **diferencia** sea el coeficiente del término lineal (-8) cuyo **producto** sea el tercer término del polinomio (20).

... Los números son -10 y +2. Debe tenerse cuidado en la colocación de esos dos números en los binomios. Para no alterar el polinomio, se recomienda hacer la prueba con los números encontrados ya sea operado o mentalmente.

$$-10 + 2 = -8 \text{ y } -10(2) = -20.$$

... **Resp.**

... Forma canónica.

... Raíz cuadrada de x^2

... Dos factores binomios con signos diferentes.

... Dos números cuya **diferencia** sea +5 y cuyo **producto** sea -6. Ellos son +6 y -1.

$$+6 - 1 = +5 \text{ y } +6(-1) = -6.$$

... **Resp.**

IMPORTANTE:



Conviene antes de factorizar un trinomio de este tipo, comprobar si es T.C.P.; si lo es, factorizarlo conforme a lo explicado antes. Se encontrarán casos muy difíciles de factorizar por tanteo e imposibles sobre $\mathbb{Z}$; entonces, se buscará otra técnica de factorización. Todo trinomio cuadrático admite factorización.

Trataremos ahora de factorizar trinomios de la forma:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde $a_2 \neq 1$ y $a_0 \neq 0$

Son ejemplos de este tipo de polinomios, los siguientes:

$$2x^2 + 5x + 3;$$

$$3x^2 + 4x - 7;$$

$$9x^2 - 12x + 4$$

En la factorización de este tipo de polinomios se emplea el **tanteo**. Además del tanteo, hay otras maneras de hacerlo. Queda al criterio del profesor. En esta factorización emplearemos el método explicado anteriormente: **tanteo**.

Ejemplos: Factorizar los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} 1. \quad 5x + 3 + 2x^2 &= 2x^2 + 5x + 3 \\ &= \frac{2(2x^2 + 5x + 3)}{2} \end{aligned}$$

... Escrito en su forma canónica.

... Se multiplica y divide el polinomio el coeficiente del término cuadrático, (2).

$$= \frac{(2x)^2 + 5(2x) + 6}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\quad}{2}\right)\left(\frac{\quad}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{(2x)(2x)}{2}$$

$$= \frac{(2x+2)(2x+3)}{2}$$

$$= \frac{2(x+1)(2x+3)}{2}$$

$$= (x+1)(2x+3)$$

$$2. \quad 4 + 9x^2 - 12x = 9x^2 - 12x + 4$$

$$= \frac{9(9x^2 - 12x + 4)}{9}$$

$$= \frac{(9x)^2 - 12(9x) + 36}{9}$$

$$= \frac{(9x - \quad)(9x - \quad)}{9}$$

$$= \frac{(9x-6)(9x-6)}{9}$$

$$= \frac{3(3x-2)3(3x-2)}{9}$$

$$= \frac{9(3x-2)(3x-2)}{9}$$

$$= (3x-2)(3x-2)$$

$$3. \quad 3x^2 - 7 + 4x = 3x^2 + 4x - 7$$

$$= \frac{3(3x^2 + 4x - 7)}{3}$$

$$= \frac{(3x)^2 + 4(3x) - 21}{3}$$

... Realmente, en los dos primeros términos, la operación de multiplicación solo se indica y se hará siempre como aparece especificado en este caso. La única multiplicación que se efectúa es la del término constante.

... Producto de dos factores binomios.

... Los primeros términos de los binomios serán la raíz cuadrada del término cuadrático. La raíz cuadrada de $(2x)^2$ es $2x$.

... Como son signos iguales, se buscan dos números cuya **suma** sea el coeficiente (5) del segundo término y cuyo **producto** sea el término constante. Esos números son 2 y 3.

... Aplicando la propiedad distributiva en los binomios y simplificando el factor común 2 con el denominador 2.

... Factorizado ... Resp.

... Escrito en su forma canónica.

... Multiplicando y dividiendo por el coeficiente 9 del término cuadrático.

... Indicando operaciones en el primero y segundo términos y efectuando la del tercer término.

... Encontrando la raíz cuadrada del primer término. El signo del primer binomio es $(-)$ y el del segundo es $(-)$; el producto de $- \times + = -$

... Son signos iguales. Se buscan dos números cuya **suma** sea -12 y cuyo **producto** sea $+36$; esos números son -6 y -6 .

... Aplicando la propiedad distributiva en ambos binomios.

... Efectuando operaciones y simplificando.

... Factorizado ... Resp.

... Escrito en su forma canónica.

... Multiplicando y dividiendo por el coeficiente 3 del término cuadrático.

... Indicando las operaciones anteriores.

$$= \frac{(3x +) (3x -)}{3}$$

$$= \frac{(3x + 7)(x - 1)3}{3}$$

$$= (3x + 7)(x - 1)$$

... Son signos diferentes. Se buscan dos números cuya **Diferencia** sea +4 y cuyo **Producto** sea -21. Esos números son 7 y -3. Cuidese el orden de escritura de esos números en los binomios.

... Factor común 3. Simplificándolo con el denominador 3.

... Factorizado

... Resp.

IMPORTANTE:

No todo trinomio cuadrático de este tipo, es factorizable por esta técnica. Pero si es cuadrático admite necesariamente factorización.



4. $-7x + 6x^2 - 3 = 6x^2 - 7x - 3$

$$= \frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6}$$

$$= \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

$$= \frac{(6x -) (6x +)}{6}$$

$$= \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

$$= \frac{3(2x - 3)2(3x + 1)}{3 \times 2}$$

$$= (2x - 3)(3x + 1)$$

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Por qué este paso?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

Resp.

...

5. $3 + 11x + 10x^2 = 10x^2 + 11x + 3$

$$= \frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6}$$

$$= \frac{10(10x^2 + 11x + 3)}{10}$$

$$= \frac{(10x)^2 + 11(10x) + 30}{10}$$

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo? ¡¡¡Termínelo Ud.!!!

**
*

GUIA DE ESTUDIO No. 5

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^2 + 5x + 6$

2. $x^2 + 4x + 3$

3. $x^2 - 5x - 14$

4. $x^2 - 2x - 8$

5. $x^2 + 24 - 10x$

6. $9 - 6x + x^2$

7. $x^2 + 2 + 3x$

8. $x^2 - 9x + 8$

9. $x^2 - 4 - 3x$

10. $x^2 - 36 - 5x$

11. $x^2 + x - 132$

12. $x^2 - 60 - 17x$

13. $x^2 - 8x - 20$

14. $x^2 - 5x + 6$

15. $x^2 - 5x - 6$

16. $y^2 - 6y - 9$

17. $y^2 + 24y + 144$

18. $x^2 + 18x + 81$

19. $-5x - 14 + x^2$

20. $-28 + 3x + x^2$

21. $-5t - 66 + t^2$

22. $v^2 - 19v - 66$

23. $m^2 + 8 + 6m$

24. $m^2 + 18 - 9m$

25. $20 - 9m + m^2$

26. $-14 + 5m + m^2$

27. $m^2 - 4mn - 21n^2$

Factorizar los siguientes polinomios:

28. $2x^2 + 3x - 2$

29. $3x^2 - 5x - 2$

30. $6x^2 + 7x + 2$

31. $5x^2 + 13x - 6$

32. $6x^2 - 6 - 5x$

33. $12x^2 - x - 6$

34. $4a^2 + 15a + 9$

35. $3 + 11a + 10a^2$

36. $12m^2 - 13m - 35$

37. $20y^2 + y - 1$

38. $8a^2 - 14a - 15$

39. $7x^2 - 44x - 35$

40. $16m + 15m^2 - 15$

41. $2a^2 + 5a + 2$

42. $12x^2 - 7x - 12$

43. $9a^2 + 10a + 1$

44. $20n^2 - 9n - 20$

45. $21x^2 + 11x - 2$

46. $m - 6 + 15m^2$

47. $15a^2 - 8a - 12$

48. $9x^2 + 37x + 4$

49. $44n + 20n^2 - 15$

50. $14m^2 - 31m - 10$

51. $2x^2 + 29x + 90$

52. $20a^2 - 7a - 40$

53. $4n^2 + n - 33$

54. $30x^2 + 13x - 10$

1.7. FACTORIZACION DE UN TRINOMIO CUADRATICO POR COMPLETACION

OBJETIVO: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Identificar los elementos necesarios de un trinomio cuadrático para factorizarlo por completacion.
- ♦ Factorizar por completacion un trinomio cuadrático.

El proceso de sumar y restar una constante (k) a un polinomio cuadrático para convertirlo en un T.C.P. se llama **completación de cuadrados**. La factorización de un trinomio de este tipo, exige conocer que **Una diferencia de cuadrados** se factoriza como el producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas del primero y del segundo término del binomio.

En este tema se enseñará a convertir un trinomio cuadrático cualesquiera, en un T.C.P. Las siguientes expresiones corresponden a polinomios cuadráticos incompletos, en los que le hace falta, el coeficiente del término lineal o el término constante, (b, k).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + 6x + k & \text{ó } x^2 + 6x + (\quad) \\ \text{b) } x^2 - bx + 25 & \text{ó } x^2 - (\quad)x + 25 \end{array}$$

IMPORTANTE:

1. El trinomio del ejemplo a), el valor del término constante k se calcula con la siguiente fórmula:

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

2. El trinomio del ejemplo b), el valor del coeficiente del término lineal b, se calcula con la siguiente fórmula

$$b = \sqrt{4k}$$

Ejemplos: ¿Qué valor para (k) debe colocarse dentro del paréntesis, para que el trinomio dado sea un T.C.P.? Factorizarlo.

1. $x^2 - 8x + ()$

Solución:

$$x^2 - 8x + ()$$

$$k = \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = (-4)^2 = 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$$

... Se desconoce el término independiente k.
El coeficiente del término lineal es $b = -8$.

... Calculando el valor de k con la fórmula respectiva.

... Factorizando T.C.P. encontrado. ... **Resp.**

2. $x^2 + ()x + 25$

Solución:

$$x^2 + ()x + 25$$

$$b = \sqrt{4k} = \sqrt{4(25)} = \sqrt{100} = 10$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$$

... Se desconoce el coeficiente del término lineal es b. El valor del término independiente es $k = 25$.

... Calculando el valor de b con la fórmula respectiva. Siempre se tomará la raíz positiva.

... Sustituyendo y factorizando el T.C.P. encontrado. ... **Resp.**

3. $x^2 + 3 + ()$

Solución:

$$x^2 + 3 + ()$$

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

... Se desconoce el término independiente k.
 $b = 3$

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... **Resp.**

En muchos casos, se pide factorizar un trinomio cuadrático cualesquiera por *completación de cuadrado*. Se consideran dos casos:

- a) Cuando el coeficiente del término cuadrático sea 1. ($a = 1$).
- b) Cuando el coeficiente del término cuadrático no sea 1. ($a \neq 1$).

Ejemplos: Factorizar por completación del cuadrado, los siguientes trinomios:

1. $x^2 - 6x + 5$

Solución:

$$x^2 - 6x + 5$$

$$= (x^2 - 6x + k) - k + 5$$

$$k = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$= (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5$$

$$= (x^2 - 6x + 9) - 4$$

$$= (x - 3)^2 - 4$$

$$= (x - 3 + 2)(x - 3 - 2) = (x - 1)(x - 5)$$

$$= x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$$

... Trinomio del caso a), donde $a = 1$.

... Sumando y restando un mismo número (k) al trinomio y asociando el término cuadrático y el lineal, con el k positivo.

... Calculando el valor de k , cuando $b = -6$.

... Sustituyendo valores y operando.

... El trinomio 'dentro del paréntesis, siempre será un T.C.P.

... Factorizando el T.C.P. Queda una diferencia de cuadrados.

... Factorizando la Diferencia de Cuadrados y operando.

... **Resp.**

2. $x^2 - 2x - 15$

Solución:

$$x^2 - 2x - 15$$

$$= (x^2 - 2x + k) - k - 15$$

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$= (x^2 - 2x + 1) - 1 - 15$$

$$= (x - 1)^2 - 16$$

$$= (x - 1 + 4)(x - 1 - 4)$$

$$= (x + 3)(x - 5)$$

$$= x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$$

... Trinomio del caso a), donde $a = 1$.

... ¿Qué se hizo?

... Calculando el valor de k .

... ¿Qué se hizo?

... Factorizando el T.C.P. y operando.

... Factorizando la Diferencia de Cuadrados y operando.

... **Resp.**

3. $x^2 - 12x + 16$

Solución:

$$x^2 - 12x + 16$$

... Trinomio del caso a), donde $a = 1$.

$$= (x^2 - 12x + k) - k + 16$$

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-12}{2}\right)^2 = (-6)^2 = 36$$

$$= (x^2 - 12x + 36) - 36 + 16$$

$$= (x^2 - 12x + 36) - 20$$

$$= (x - 6)^2 - 20$$

$$= (x - 6 - \sqrt{20})(x - 6 + \sqrt{20})$$

$$= (x - 6 - 2\sqrt{5})(x - 6 + 2\sqrt{5})$$

$$= x^2 - 12x + 16 = (x - 6 - 2\sqrt{5})(x - 6 + 2\sqrt{5})$$

... Sumando y restando un mismo número (k) al trinomio y asociando el término cuadrático y el lineal, con el k positivo.

... ¿Qué se hizo? ¿Cuánto vale b?

... Sustituyendo valores y operando.

... El trinomio dentro del paréntesis, siempre será un TC.P.

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... Simplificando radicales.

... Resp.

4. $3x^2 + 4x - 7$

Solución:

$$3x^2 + 4x - 7$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x^2 + \frac{4}{3}x + k\right) - k - \frac{7}{3}\right]$$

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$= 3\left[\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9} - \frac{7}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right)\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 1)\right] = (3x + 7)(x - 1)$$

$$= 3x^2 + 4x - 7 = (3x + 7)(x - 1)$$

... Trinomio del caso b), donde $a \neq 1$.

... Sacar siempre de factor común, el coeficiente principal o del término cuadrático.

... Sumando y restando un mismo número (k) dentro de los corchetes y asociando el k positivo con el término cuadrático y lineal.

... Calculando k, cuando $b = \frac{4}{3}$

... Sustituyendo y operando.

... Operando dentro de los corchetes.

... Factorizando la diferencia de cuadrados.

... Operando. Luego, la factorización queda así:

... Resp.

5. $2x^2 - 5x - 12$

Solución:

$$2x^2 - 5x - 12$$

... Trinomio del caso b), donde $a \neq 1$.

$$= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{12}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - 6\right)$$

$$= 2\left[\left(x^2 - \frac{5}{2}x + k\right) - k - 6\right]$$

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{5}{2}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$= 2\left[\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{16} - 6\right]$$

$$= 2\left[\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{121}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{11}{4}\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4} + \frac{11}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} - \frac{11}{4}\right)\right] = 2\left(x + \frac{6}{4}\right)\left(x - \frac{16}{4}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 4)$$

$$= (2x + 3)(x - 4)$$

$$= 2x^2 - 5x - 12 = (2x + 3)(x - 4)$$

... Sacando de factor común 2 que es el coeficiente principal.

... Sumando y restando un mismo número (k) dentro de los corchetes y asociándolo con el término cuadrático y lineal. ¿Para qué?

... Calculando k, cuando $b = -\frac{5}{2}$

... Sumando y restando el valor de k.

... Operando.

... ¿Qué se hizo?

... Factorizando la diferencia de cuadrados que quedó y operando.

... Simplificando.

... Efectuando operaciones indicadas.

... Resp.

6. $2x^2 + 3x - 2$

Solución:

$$2x^2 + 3x - 2$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{2}{2}\right) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$$

$$= 2\left[\left(x^2 + \frac{3}{2}x + k\right) - k - 1\right]$$

$$k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$= 2\left[\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} - 1\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)\right]$$

... Trinomio cuadrático. ¿De qué tipo? ¿Porqué?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

$$= 2\left(x + \frac{8}{4}\right)\left(x - \frac{2}{4}\right)$$

$$= 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (x + 2)(2x - 1)$$

$$= 2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$$

... ¿Qué se hizo?

... Simplificando.

... Operando.

... Resp.

*

GUIA DE ESTUDIO No. 6

Factorizar por completación de cuadrados, los siguientes polinomios:

1. $x^2 + 3x + 2$

2. $x^2 + 7x + 6$

3. $x^2 + 4x + 4$

4. $x^2 + 8x + 12$

5. $x^2 - 2x + 1$

6. $x^2 - 6x + 5$

7. $x^2 - 5x + 6$

8. $x^2 - 7x + 10$

9. $x^2 + 7x - 8$

10. $x^2 - x - 2$

11. $x^2 - x - 3$

12. $x^2 - 5x - 4$

13. $2x^2 + 3x + 1$

14. $2x^2 + 9x + 4$

15. $3x^2 + 7x + 2$

16. $3x^2 - 4x + 1$

17. $2x^2 - 5x + 2$

18. $2x^2 - 11x + 5$

19. $2x^2 + 7x + 6$

20. $2x^2 + 13x + 16$

21. $3x^2 + 14x + 8$

22. $4x^2 + 11x + 6$

23. $4x^2 + 4x + 1$

24. $6x^2 + 7x + 2$

25. $2x^2 - 5x + 2$

26. $2x^2 - 11x + 5$

27. $2x^2 - 9x + 9$

28. $3x^2 - 5x + 2$

29. $3x^2 - 11x + 6$

30. $4x^2 - 7x + 3$

31. $4x^2 - 8x + 3$

32. $6x^2 - 11x + 4$

33. $2x^2 + 5x - 3$

34. $2x^2 + 11x - 6$

35. $2x^2 + 15x - 8$

36. $3x^2 + 11x - 4$

37. $2x^2 + x - 6$

38. $2x^2 + 5x - 12$

39. $3x^2 + 7x - 6$

*

1.8. TEOREMA DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

OBJETIVO: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Determinar procedimientos para encontrar factores de polinomios.
- ♦ Enunciar y comprender el Teorema del Factor y del Residuo.
- ♦ Plantear y resolver ejercicios aplicando el Teorema del Factor y del Residuo.

Si se divide $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ por $D(x) = x - 2$, se obtiene un cociente $Q(x) = 2x^2 + x + 3$ y un $R(x) = 5$. Si ahora, se sustituye en $P(x)$ la x por 2, se obtiene también un $R(x) = 5$; así:

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{A) } 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ & 4 & 2 & 6 & \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

... Por división sintética.

$$\begin{array}{ll} Q(x) = 2x^2 + x + 3 & \text{Cociente } Q(x) \\ R(x) = 5 & \text{Residuo } R(x) \end{array}$$

... Resp.

$$\begin{aligned} \text{B) } P(2) &= 2(2)^3 - 3(2)^2 + 2 - 1 \\ &= 2(8) - 3(4) + 2 - 1 \\ &= 16 - 12 + 2 - 1 \\ P(2) &= 5 \\ P(2) &= 5 = R(x) \end{aligned}$$

... Sustituyendo 2 por x en $P(x)$ y operando.
(El 2 corresponde al término independiente del $D(x)$ cambiando de signo).

... El residuo $R(x)$ es 5, cuando $P(x)$ se divide por $(x - 2)$.
... Resp.

En el caso A, el residuo se obtuvo usando la división sintética y en el caso B se sustituyó 2 por la x y se operó. En ambos casos se coincidió en un valor final: 5 que corresponde al $R(x)$ de esa división. Observar que en el caso B, cuando se hace la sustitución, el valor de 2 cambia de signo ¿Por qué?

Ejemplo 2. ¿Cuál es el residuo $R(x)$ cuando $P(x) = 2x^3 - 4x - 17 - 3x^2$ se divide por $D(x) = (x + 3)$? Obtenerlo de dos maneras diferentes.

Solución:

$$\begin{array}{l} \text{A) } P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 17 \\ D(x) = x + 3 \end{array}$$

... Forma canónica de $P(x)$ y $D(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -3 & -4 & -17 & -3 \\ & -6 & 27 & -69 & \\ \hline & 2 & -9 & 23 & -86 \end{array}$$

... Aplicando división sintética.

$$R(x) = -86$$

... Resp.

$$\begin{aligned} \text{B) } P(-3) &= 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 4(-3) - 17 \\ &= 2(-27) - 3(9) + 12 - 17 \\ &= -54 - 27 + 12 - 17 = -86 \\ P(-3) &= -86 = R(x) \end{aligned}$$

... Sustituyendo -3 por x y operando. El término independiente de $D(x)$ cambia siempre de signo ¿Por qué?

... Resp.

En ambos casos se obtiene el mismo número (-86) como resultado de dividir $P(x)$ por $D(x) = x + 3$. Esta observación, motiva el siguiente teorema, conocido con el nombre de **teorema del residuo**.

TEOREMA DEL RESIDUO: Si $P(x)$ se divide por un polinomio lineal $D(x) = x - r$ hasta que se obtiene un residuo $R(x)$ constante entonces: $P(r) = R(x)$. Esto es, el residuo $R(x)$ siempre es una constante igual al valor de la función cuando $x = r$. (*Se cambia el signo a la constante r*).

Ejemplo 3.Cuál es el $R(x)$ cuando $P(x) = x^5 + x^4 + 6$ se divide por $D(x) = x + 2$?

Solución:

$$\begin{aligned} R(x) &= P(-2) \\ &= (-2)^5 + (-2)^4 + 6 \\ &= -32 + 16 + 6 = -32 + 22 = -10 \\ R(x) &= -10 \end{aligned}$$

... Aplicando el Teorema del Residuo cuando $x = -2$. Sustituyendo y operando.

... **Resp.**

El teorema del residuo, conduce a otro teorema no menos importante, conocido como el *Teorema del Factor*, que es muy útil para encontrar factores de polinomios en ciertos casos especiales.

TEOREMA DEL FACTOR: El polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x - r)$, si y solamente si $P(r) = 0$.

Ejemplo 1.¿Es $(x - 2)$ un factor de $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Para } (x - 2) \text{ entonces } x &= 2 \\ P(2) &= 2^3 + 2(2)^2 - 5(2) + 6 \\ &= 8 + 8 - 10 + 6 \\ &= 16 - 16 = 0 \\ P(2) &= 0 \text{ entonces:} \\ (x - 2) &\text{ es un factor de } P(x) \text{ porque } P(2) = 0 \end{aligned}$$

... Cambiando el signo a 2.

... Aplicando el Teorema del Residuo para $P(2)$.

... Operando.

... **Resp.**

Ejemplo 2.¿Es $(2x - 1)$ es un factor de $P(x) = 4x^3 - 5x + 2$?

Solución:

$$(2x - 1) = 2(x - \frac{1}{2}); \text{ entonces } x = \frac{1}{2}$$

... Factorizando y cambiando el signo a $-\frac{1}{2}$. Para aplicar el este teorema, el $D(x)$ debe tener siempre coeficiente principal 1. Se saca siempre como factor común, el número que representa el coeficiente principal.

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{2}) &= 4(\frac{1}{2})^3 - 5(\frac{1}{2}) + 2 \\ &= 4(\frac{1}{8}) - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 \\ &= -\frac{4}{2} + 2 = -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

... Sustituyendo y operando.

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{2}) &= 0 \text{ entonces:} \\ (2x - 1) &\text{ es un factor de } P(x). \text{ ¿Por qué?} \end{aligned}$$

... **Resp.**

Ejemplo 3. ¿Es $(3x + 2)$ un factor de $P(x) = 3x^3 - 2x + 3$?

Solución:

$$(3x + 2) = 3(x + \frac{2}{3}) \text{ entonces } x = -\frac{2}{3}$$

$$P(-\frac{2}{3}) = 3(-\frac{2}{3})^3 - 2(-\frac{2}{3}) + 3$$

$$= 3(-\frac{8}{27}) + \frac{4}{3} + 3$$

$$= -\frac{8}{9} + \frac{4}{3} + 3 = \frac{31}{9}$$

$$P(-\frac{2}{3}) = \frac{31}{9} \text{ entonces:}$$

$$(3x + 2) \text{ no es factor de } P(x)$$

$$\text{porque } P(-\frac{2}{3}) \neq 0$$

... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

1.9. FACTORIZACION DE POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2 QUE CONTIENEN FACTORES DE LA FORMA $(x \pm a)$. UTILIZACIÓN DEL TEOREMA DE FACTOR

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Proponer procedimientos para factorizar polinomios de grado mayor que 2 que contienen factores de la forma $(x \pm a)$, mediante la aplicación de la división sintética y el teorema del factor.
- ♦ Comprender el proceso de factorización de polinomios aplicando los teoremas del factor y del residuo.
- ♦ Proponer y resolver ejercicios aplicando el proceso general de la factorización de polinomios.

En la factorización de polinomios de este tipo, se aplicará, tanto la división sintética como el teorema del factor y del residuo. Como casos especiales, sólo se contemplarán polinomios de tercer grado.

Ejemplos: Factorizar los siguientes polinomios:

7. $P(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$

Solución:

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$$

... Forma canónica de $P(x)$

a) $D(5) = \{\pm 5, \pm 1\}$

... Calculando los divisores del término independiente.

b) $x - (-5); x - (-1); x - (+1); x - (+5)$ ó
 $(x + 5); (x + 1); (x - 1); (x - 5)$

... Posibles divisores de $P(x)$.

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -8 & 16 & -5 & 1 \\ & 1 & -7 & 9 & \\ \hline & -7 & 9 & 4 & \end{array}$$

... Ensayando los divisores por medio de la división sintética o por el Teorema del factor. Se ensayó con $(x-1)$ y como $R(x) \neq 0$, entonces $(x-1)$ no es factor de $P(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{d)} & 1 & -8 & 16 & -5 & 5 \\ & & 5 & -15 & 5 & \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 & \end{array}$$

... Ensayando con $(x - 5)$. Se puede observar que $R(x) = 0$ entonces $(x - 5)$ es un factor del $P(x)$.

e) $P(x) = (x - 5)(x^2 - 3x + 1)$

... Un factor es $(x - 5)$ y el otro se forma con la matriz de coeficientes calculados en **d** y que está a la izquierda de la doble barra.

f) $P(x) = (x - 5)(x^2 - 3x + 1)$

... El factor cuadrático, se debe factorizar cuando se pueda de acuerdo con las técnicas antes estudiadas.

g) $P(x) = x^3 - 8x^2 + 16x + 1 = (x - 5)(x^2 - 3x + 1)$

... Resp.

8. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Solución:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
 $D(6) = \{\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$

... Forma canónica de $P(x)$ y divisores del término independiente.

b) $(x - 6); (x + 6); (x + 3); (x + 2)$
 $(x - 2); (x + 1); (x - 1); (x - 3)$

... Todos los posibles divisores de $P(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{c)} & 1 & -2 & -5 & 6 & 2 \\ & & 2 & 0 & -10 & \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -4 & \end{array}$$

... Ensayando con $(x - 2)$. Este no es factor de $P(x)$. ¿Por qué?

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{d)} & 1 & -2 & -5 & 6 & -2 \\ & & -2 & 8 & -6 & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 & \end{array}$$

... Ensayando con otro divisor $(x + 2)$.

... $(x + 2)$ es factor de $P(x)$ porque $R(x) = 0$

e) $P(x) = (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$
 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 3)(x - 1)$
 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 3)(x - 1)$

... ¿Cómo forma el factor cuadrático?
 ... Factorizando el trinomio cuadrático por tanteo. Escribiendo el $P(x)$ factorizado.
 ... Resp.

 *

GUIA DE ESTUDIO No. 7

Calcular $R(x)$ usando el Teorema del residuo cuando se divide:

1. $(2x^3 - 4x^2 + x - 1) \div (x + 2)$

2. $(x^3 - 3x + 9) \div (x + 3)$

3. $(3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8x + 3) \div (x + 3)$

4. $(x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

5. $(x^4 - 2x + 3x^2 - 2) \div (x + 2)$

6. $(x^5 - 32) \div (x - 2)$

7. $(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) \div (x - 2)$

8. $(x^3 + 3x - 50) \div (x + 3)$

Emplear el Teorema del Factor para determinar si la segunda expresión, es un factor de la primera:

9. $(x^3 - 1); x + 1$

10. $(x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 72); x - 3$

11. $(4x^3 + x^2 - 16x - 4); x - 2$

12. $(3x^5 - 7x^2 - x + 8); x - 5$

13. $(3x^5 + 7x^2 - 8); x - 2$

14. $(x^3 + 27); x + 3$

15. $(x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 32x - 16); x - 4$

16. $(x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 56); x - 2$

Factorizar empleando la División Sintética o el Teorema del Factor:

17. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

18. $P(x) = x^3 + 8x^2 + 20x + 16$

19. $P(x) = x^3 + 3 - 4$

20. $P(x) = x^3 + x + 10$

21. $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 6$

22. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

23. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

24. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

25. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 1

Factorizar o descomponer, en dos factores:

1. $9ax + 18a$

2. $4xy - 8x^2y$

3. $xy - x^2y^2$

4. $18x^3y^2 - 9x^2y^2$

5. $6x^2 - 6xy - 6x$

6. $6(2x - 1) - 3x(2x - 1)$

7. $x(3y - 1) - y(3y - 1)$

8. $4x(y + 1) - 3(y + 1)$

9. $am - bm + an - bn$

10. $ax - 2bx - 2ay + 4by$

11. $6ax + 3a + 1 + 2x$

12. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$

13. $2a^2x - 5a^2 + 15by - 6bx$

14. $1 + a + 3ab + 36$

Factorizar los siguientes Trinomios:

15. $x^2 + 6x - 40$

16. $x^2 + x - 30$

17. $x^2 - 5x - 24$

18. $x^2 - 6x - 72$

19. $3x^2 + 14x + 18$

20. $4x^2 + 11x + 6$

21. $3x^2 - 4x + 1$

22. $4x^2 - 9x + 2$

23. $2x^2 - 9x + 9$

24. $3x^2 - 5x + 2$

25. $3x^2 - 11x + 6$

26. $2x^2 - 7x - 4$

27. $2x^2 - 13x - 7$

28. $21x^2 + 11x - 2$

Hallar por División Sintética, el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ de las siguientes divisiones:

29. $(x^3 - x^2 + 2x - 2) \div (x + 1)$

30. $(x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 2)$

31. $(a^3 - 3a^2 - 6) \div (a + 3)$

32. $(n^4 - 5n^3 + 4n - 48) \div (n + 2)$

33. $(x^4 - 3x + 5) \div (x - 1)$

34. $(x^5 + x^4 - 12x^3 - x^2 - 4x - 2) \div (x + 4)$

Factorizar, si es posible, empleando la División Sintética o el Teorema del Factor:

35. $x^3 - 2x^2 - x + 2$

36. $x^3 - x^2 - 9x + 9$

37. $x^3 - 2x^2 - 4x + 4$

38. $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

39. $x^3 - 7x + 6$

40. $2x^3 + 3x^2 - 1$

41. $x^3 - x^2 - x - 1$

42. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

43. $4x^3 - 8x^2 - x + 2$

44. $9x^3 + 18x^2 - x - 2$

Factorizar las siguientes expresiones

45. $4a^2 - 9$

46. $1 - \frac{a^2}{25}$

47. $x^3 - 27$

48. $x^6 - 8y^{12}$

49. $\frac{1}{4} - 9a^2$

50. $\frac{1}{16} - \frac{4x^2}{49}$

51. $8x^3 - 27y^3$

52. $512 - 27a^6$

53. $8x^3 - 125y^3$

54. $27a^3 + 8b^3$

55. $x^6 + y^6$

56. $64x^3 - 8y^3$

57. $x^6 + x^3$

58. $x^6 - 8y^3$

Factorizar los siguientes trinomios empleando la técnica de completación:

59. $x^2 - 4x + 3$

60. $x^2 + 6x + 8$

61. $2x^2 - 5x + 2$

62. $2x^2 - x - 3$

63. $x^2 - 4x + 1$

64. $2x^2 + 5x + 3$

65. $4x^2 - 12x + 9$

66. $2x^2 + 3x + 11$

67. $3x^2 + 5x - 2$

68. $2x^2 - 5x + 2$

69. $6x^2 + 1 - 5x$

70. $12x^2 + x + 1$

71. $3x^2 - 2x - 5$

72. $2x^2 - x - 3$

73. $3x^2 + 5x + 2$

74. $2x^2 + 3x + 1$

75. $2x^2 - 5x + 3$

76. $12x^2 + 5x - 2$

*

·RESPUESTAS

- | | | |
|--|--|--------------------------------------|
| 1. $9a(x+2a)$ | 3. $xy(1-xy)$ | 5. $6x(x-y-1)$ |
| 7. $(3y-1)(x-y)$ | 9. $(a-b)(m+n)$ | 11. $(2x+1)(3a+1)$ |
| 13. $(a^2-3b)(2x-5y)$ | 15. $(x+10)(x-4)$ | 17. $(x-8)(x+3)$ |
| 19. $(3x+2)(x+4)$ | 21. $(3x-1)(x-1)$ | 23. $(2x-3)(x-3)$ |
| 25. $(3x-2)(x-3)$ | 27. $(x-7)(2x+1)$ | 29. $Q(x) = x^2 - 2x + 4, R(x) = -6$ |
| 31. $Q(a) = a^2 - 6a + 18; R(a) = -60$ | 33. $Q(x) = x^3 + x^2 + x - 2, R(x) = 3$ | |
| 35. $(x-1)(x+1)(x-2)$ | 37. $(x-2)(x-2)(x+2)$ | 41. $(x-1)(x-1)(x+1)$ |
| 43. $(2x+1)(2x-1)(x-2)$ | 45. $(2a-3)(2a+3)$ | 47. $(x-3)(x^2+3x+9)$ |
| 49. $\left(\frac{1}{2} - 3a\right)\left(\frac{1}{2} + 3a\right)$ | 51. $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$ | |
| 53. $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$ | 55. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ | |
| 57. $(x^2+y)(x^4-x^2y+y^2)$ | 59. $(x-1)(x-3)$ | |
| 61. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$ | 63. $(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$ | |
| 65. $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ | 67. $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)$ | |

 *

UNIDAD 2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES. SIMPLIFICACION

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ◆ Reconocer una expresión algebraica racional como una división de polinomios, donde el polinomio denominador es diferente a cero.
- ◆ Calcular la expresión reducida de una expresión algebraica racional, aplicando la factorización y las propiedades de los números reales.
- ◆ Resolver ejercicios de simplificación y expresiones algebraicas racionales.

Una **expresión algebraica racional**, es una razón o división de polinomios. Las expresiones racionales son “**extensiones algebraicas**” de los números racionales; de modo que las reglas fundamentales para efectuar operaciones con números racionales se extienden a las expresiones racionales, también llamadas **Fracciones Algebraicas**.

Es de hacer notar que en una expresión racional algebraica, el denominador debe ser distinto de cero; por tanto, se excluirán aquellos valores para la variable con los cuales se indefiniría la expresión.

Ejemplos de **expresiones algebraicas racionales** son los siguientes:

$$\frac{3}{x-2}; \quad \frac{x+1}{2x-3}; \quad \frac{x^2+5x+6}{(x+3)(x-1)}; \quad \frac{(x-2)(2x-1)^2}{(x-2)^2(2x-1)}$$

IMPORTANTE: 1.



$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

El negativo de una fracción es igual a la fracción obtenida al tomar el negativo del numerador o del denominador.

Ejemplo:

$$-\frac{2-x}{x^2-5} = \frac{-(2-x)}{(x^2-5)} = \frac{2-x}{-(x^2-5)}$$

Obsérvese que, dado que $-(2-x) = -2+x = x-2$, cada una de las fracciones anteriores es igual a:

$$\frac{x-2}{x^2-5}$$

2. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

Una fracción puede ser simplificada dividiendo el numerador y el denominador entre la misma cantidad diferente de cero.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+5x-6}{x^2+6x} &= \frac{(x-1)(x+6)}{x(x+6)} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

... Factorizando por tanteo el trinomio y factor común en el denominador y simplificando.

... Resp.

SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una expresión racional se dice que está *simplificada ó reducida a su mínima expresión*, si el numerador y denominador no tiene ningún factor común.

REGLA: Para simplificar expresiones algebraicas racionales cuyos términos sean polinomios, se factorizan todo lo posible tanto el numerador como el denominador y se suprimen los factores comunes a ellos.

Ejemplos: Simplificar las siguientes expresiones algebraicas racionales:

1.
$$\frac{2a^2}{4a^2 - 4ab}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{2a^2}{4a^2 - 4ab} &= \frac{2a^2}{4a(a - b)} \\ &= \frac{a}{2(a - b)} \\ &= \frac{a}{2(a - b)}\end{aligned}$$

... Factorizando el denominador.

... Dividiendo 2 y 4 entre 2, y a^2 y a entre a .

... Resp.

2.
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2ax - 6a}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 5x + 6}{2ax - 6a} &= \frac{(x - 2)(x - 3)}{2a(x - 3)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 3)}{2a(x - 3)} \\ &= \frac{x - 2}{2a}\end{aligned}$$

... Factorizando numerador y denominador, y cancelando sus respectivos factores comunes

... Resp.

3.
$$\frac{8a^3 - 27}{4a^2 - 12a + 9}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{8a^3 - 27}{4a^2 - 12a + 9} &= \frac{(2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)}{(2a - 3)(2a - 3)} = \frac{4a^2 + 6a + 9}{2a - 3} \\ &= \frac{4a^2 + 6a + 9}{2a - 3}\end{aligned}$$

... Factorizando el numerador como una diferencia de cubos y el denominador como T.C.P. y simplificando. Cancelando sus respectivos factores comunes.

... Resp.

$$4. \frac{a^3 - 25a}{2a^3 + 8a^2 - 10a}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - 25a}{2a^3 + 8a^2 - 10a} &= \frac{a(a^2 - 25)}{2a(a^2 + 4a - 5)} \\ &= \frac{a(a-5)(a+5)}{2a(a+5)(a-1)} = \frac{a-5}{2(a-1)} \end{aligned}$$

... Explique cada paso realizado.

... Resp.

GUÍA DE ESTUDIO No. 8

Simplificar las siguientes expresiones racionales algebraicas.

$$1. \frac{3ab}{2a^2x - 2a^3}$$

$$2. \frac{xy}{3x^2y - 3xy^2}$$

$$3. \frac{2ax + 4bx}{3ay + 6by}$$

$$4. \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

$$5. \frac{10a^2b^3c}{80(a^3 - a^2b)}$$

$$6. \frac{x^2 - 4}{5ax + 10a}$$

$$7. \frac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6}$$

$$8. \frac{15a^2bn - 45a^2bm}{10^2b^2n - 30a^2b^2m}$$

$$9. \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$10. \frac{3x^2y + 15xy}{x^2 - 25}$$

$$11. \frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3}$$

$$12. \frac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x}$$

$$13. \frac{6x^2 + 5x - 6}{15x^2 - 7x - 2}$$

$$14. \frac{2ax + ay - 4bx - 2by}{ax - 4a - 2bx + 8b}$$

$$15. \frac{a^2 - ab - 6b^2}{a^3x - 6a^2bx + 9ab^2x}$$

$$16. \frac{a^2 - a - 20}{a^2 - 7a + 10}$$

$$17. \frac{n^3 - n}{n^2 - 5n - 6}$$

$$18. \frac{3x^3 + 9x^2}{x^2 + 6x + 9}$$

$$19. \frac{a(4a^2 - 8ab)}{x(3a^2 - 6ab)}$$

$$20. \frac{x^3 - 6x^2}{x^2 - 12x + 36}$$

$$21. \frac{3x^2 + 19x + 20}{6x^2 + 17x + 12}$$

$$22. \frac{a^2n^2 - 36a^2}{an^2 + an - 30a}$$

$$23. \frac{16a^2x - 25x}{12a^3 - 7a^2 - 10a}$$

$$24. \frac{2x^3 + 6x^2 - x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

2.2. MULTIPLICACION Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Interpretar y aplicar los pasos de la regla práctica, para multiplicar expresiones algebraicas racionales.
- ♦ Interpretar y aplicar los pasos de la regla práctica, para dividir expresiones algebraicas racionales.
- ♦ Resolver ejercicios de multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales.

REGLA:

1. Se factorizan todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar.
2. Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y en los denominadores
3. Se expresan como factores las expresiones que quedan en los numeradores después de simplificar, y éste producto se divide por el producto de la o las expresiones que quedan en los denominadores. *A menos que se pidan, estas operaciones indicadas no se efectúan.*

Ejemplos: Efectuar las siguientes operaciones:

$$1. \left(\frac{2a}{3b^3} \right) \left(\frac{3b^2}{4x} \right) \left(\frac{x^2}{2a^2} \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a(3b^2)(x^2)}{3b^3(4x)(2a^2)} && \dots \text{ Por definición de multiplicación} \\
 &= \frac{\cancel{2a}(3b^2)(x^2)}{3b^3(\cancel{4x})(2a^2)} = \frac{x}{4ab} && \dots \text{ Simplificando.} \\
 &= \frac{x}{4ab} && \dots \text{ Resp.}
 \end{aligned}$$

$$2. \left(\frac{3x-3}{2x+4} \right) \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-x} \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 3x-3 &= 3(x-1) \\
 x^2+4x+4 &= (x+2)(x+2) && \dots \text{ Factorizando todos los polinomios que forman las fracciones.} \\
 2x+4 &= 2(x+2) \\
 x^2-x &= x(x-1) \\
 &= \frac{3(x-1)(x+2)(x+2)}{2(x+2)x(x-1)} = \frac{3(x+2)}{2x} && \dots \text{ Simplificando.} \\
 &= \frac{3(x+2)}{2x} && \dots \text{ Resp.}
 \end{aligned}$$

$$3. \left(\frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a} \right) \left(\frac{a^2 - a - 6}{3a^2 + 7a + 4} \right) \left(\frac{3a + 4}{a^2 - 4a + 3} \right)$$

Solución:

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1);$$

$$a^2 + 2a = a(a + 2);$$

$$a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2);$$

... Factorizando todos los polinomios.

$$a^2 - 4a + 3 = (a - 1)(a - 3);$$

$$3a^2 + 7a + 4 = (a + 1)(3a + 4);$$

$$3a + 4 = 3a + 4$$

$$= \frac{(a + 1)(a - 1)(a - 3)(a + 2)(3a + 4)}{a(a + 2)(a + 1)(3a + 4)(a - 1)(a - 3)} = \frac{1}{a}$$

... Paso 2 y 3 de la regla.

$$= \frac{1}{a}$$

... Resp.

DIVISION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

REGLA:

1. Se factorizan todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a dividir.
2. Se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.
3. Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en el numerador y denominador.
4. Se expresan como factores las expresiones que quedan en los numeradores después de simplificar, y éste producto se divide por el producto de la o las expresiones que queden en los denominadores. *A menos que se pidan, estas operaciones indicadas no se efectúan.*

Ejemplos: Efectuar las siguientes operaciones:

$$1. \frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3}$$

Solución:

$$\frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3} = \frac{4a^2}{3b^2} \left(\frac{9b^3}{2ax} \right)$$

... Paso 2 de la regla.

$$= \frac{\cancel{4}^2 a^2}{\cancel{3} b^2} \left(\frac{\cancel{9}^3 b^3}{\cancel{2}^1 a x} \right) = \frac{6ab}{x}$$

... Simplificando.

$$= \frac{6ab}{x}$$

... Resp.

$$2. \quad \frac{x^2 + 4x}{8} \div \frac{x^2 - 16}{4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4x}{8} \div \frac{x^2 - 16}{4} &= \frac{x^2 + 4x}{8} \left(\frac{4}{x^2 - 16} \right) \quad \dots \text{ Paso 2 de la regla.} \\ &= \frac{x(x+4)(4)}{8(x-4)(x+4)} = \frac{x}{2(x-4)} \quad \dots \text{ Paso 1 de la regla.} \\ &= \frac{x}{2(x-4)} \quad \dots \text{ Resp.} \end{aligned}$$

*

GUIA DE ESTUDIO No. 9

Efectuar las siguientes operaciones

1. $\left(\frac{2x^3}{15a^3} \right) \left(\frac{3a^2}{y} \right) \left(\frac{5x^2}{7xy^2} \right)$
2. $\left(\frac{7a}{6m^2} \right) \left(\frac{3m}{10n^2} \right) \left(\frac{5n^4}{14ax} \right)$
3. $\left(\frac{2x^2 + x}{6} \right) \left(\frac{8}{4x + 2} \right)$
4. $\left(\frac{5x + 25}{14} \right) \left(\frac{7x + 7}{10x + 50} \right)$
5. $\left(\frac{2x^2 + 2x}{2x^2} \right) \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} \right)$
6. $\left(\frac{a^2 - ab + a - b}{a^2 + 2a + 1} \right) \left(\frac{3}{6a^2 - 6ab} \right)$
7. $\left(\frac{m + n}{mn - n^2} \right) \left(\frac{n^2}{m^2 - n^2} \right)$
8. $\left(\frac{2a - 2}{2a^2 - 50} \right) \left(\frac{a^2 - 4a - 5}{3a + 3} \right)$
9. $\left(\frac{2x^2 - 3x - 2}{6x + 3} \right) \left(\frac{3x + 6}{x^2 - 4} \right)$
10. $\left(\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{4x^2 + 8x + 3} \right) \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^2 - x} \right)$
11. $\left(\frac{x^3 - 27}{a^3 - 1} \right) \left(\frac{a^2 + a + 1}{x^2 + 3x + 9} \right)$
12. $\left(\frac{1 - x}{a + 1} \right) \left(\frac{a^2 + a}{x - x^2} \right) \left(\frac{x^2}{a} \right)$

GUIA DE ESTUDIO No. 10

Efectuar las siguientes operaciones:

1. $\frac{5m^2}{7n^3} \div \frac{10m^4}{14an^4}$
2. $\frac{15m^2}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4}$
3. $\frac{x-1}{3} \div \frac{2x-2}{6}$
4. $\frac{3a^2}{a^2 + 6ab + 9} \div \frac{5a^3}{a^2b + 3ab^2}$
5. $\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} \div \frac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$
6. $\frac{1}{a^2 - a - 30} \div \frac{2}{a^2 + a - 42}$

$$7. \frac{20x^2 - 30x}{15x^3 + 15x^2} \div \frac{4x - 6}{x + 1}$$

$$8. \frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \div \frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 5a - 24}$$

$$9. \frac{8x^2 + 26x + 15}{16x^2 - 9} \div \frac{6x^2 + 13x - 5}{9x^2 - 1}$$

$$10. \frac{x^3 - 121x}{x^2 - 49} \div \frac{x^2 - 11x}{x + 7}$$

$$11. \frac{ax^2 + 5}{4a^2 - 1} \div \frac{a^3x^2 + 5a^2}{2a - 1}$$

$$12. \frac{x^3 + 125}{x^2 - 64} \div \frac{x^3 - 5x^2 + 25x}{x^2 + x - 56}$$

2.3. MINIMO COMUN MULTIPLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Proponer procedimientos para calcular el Mínimo Común Múltiplo; Sumar y Restar expresiones algebraicas.
- ♦ Comprender el proceso del cálculo del mínimo común múltiplo, de la adición y sustracción de expresiones racionales algebraicas.
- ♦ Plantear y resolver ejercicio de mínimo común múltiplo, adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales.

MINIMO COMUN MULTIPLO

MULTIPLO COMUN: De dos o más expresiones algebraicas, es toda expresión algebraica que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

- ♦ $8a^3b^2$ es múltiplo común de $2a^2$ y $4a^3b$ porque $8a^3b^2$ es divisible exactamente por $2a^2b$ y $4a^3b$.
- ♦ $3x^2 - 9x + 6$ es múltiplo común de $x - 2$ y de $x^2 - 3x + 2$ porque $3x^2 - 9x + 6$ es divisible exactamente por $x - 2$ y por $x^2 - 3x + 2$.

DEFINICION: El *Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.)* de dos o más expresiones algebraicas, es la expresión algebraica de *menor coeficiente numérico* y de *mayor grado* que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

Ejemplos:

$$\text{M.C.M. } (4a, 6a) = 12a$$

$$\text{M.C.M. } (2x^2, 6x^3, 9x^4) = 18x^4$$

REGLA: Para encontrar el *Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.)* de dos o más expresiones algebraicas empleando la factorización, se descomponen las expresiones algebraicas dadas, en sus factores primos. El M.C.M. de ellos, es el *producto de los factores primos comunes y no comunes, con su mayor exponente*.

Ejemplos: Calcular:

1. M.C.M. ($14a^2$, $7x - 21$)

Solución:

$$7x - 21 = 7(x - 3)$$

$$14a^2 = 2(7a^2)$$

$$\text{M.C.M.}(14a^2, 7x-21)=2 \cdot 7a^2(x-3)=14a^2(x-3) \quad \dots \text{ Resp.}$$

... Factorizando ambos polinomios. Factor común.

2. M.C.M. ($15x^2$, $10x^2 + 5x$, $45x^3$)

Solución:

$$10x^2 + 5x = 5x(2x + 1)$$

$$15x^2 = 3 \cdot 5x^2$$

$$45x^3 = 3^2 \cdot 5x^3$$

$$3^2, 5, x^3, (2x + 1)$$

$$\text{M.C.M.} = 3^2 \cdot 5x^3(2x + 1) = 45x^3(2x + 1)$$

... Factorizando. Factor común.

... Son los factores comunes y no comunes en su mayor exponente.

... Resp.

3. M.C.M. ($8a^2b$, $4a^3 - 4a$, $6a^2 - 12a + 6$)

Solución:

$$6a^2 - 12a + 6 = 2 \cdot 3(a - 1)(a - 1)$$

$$= 2 \cdot 3(a - 1)^2$$

$$4a^3 - 4a = 4a(a^2 - 1) = 4a(a - 1)(a + 1)$$

$$8a^2b = 2^3 \cdot a^2b$$

$$2^3, 3, (a - 1)^2, (a + 1), a^2b$$

$$\text{M.C.M.} = 2^3 \cdot 3a^2b(a - 1)^2(a + 1)$$

$$= 24a^2b(a - 1)^2(a + 1)$$

... Factorizando. Factor común y por Tanteo.

... Factor común y Diferencia de Cuadrados

... Factor Común.

... Son los factores comunes y no comunes en su mayor exponente.

... Resp.

4. M.C.M. ($24a^2x$, $18xy^2$, $2x^3 + 2x^2 - 40x$, $8x^4 - 200x^2$)

Solución:

$$2x^3 + 2x^2 - 40x = 2x(x^2 + x - 20) = 2x(x + 5)(x - 4) \quad \dots \text{ ¿Qué se hizo?}$$

$$8x^4 - 200x = 8x^2(x^2 - 25) = 2^3x^2(x + 5)(x - 4) \quad \dots \text{ ¿Qué se hizo?}$$

$$18xy^2 = 2 \cdot 3^2xy^2 \quad \dots \text{ ¿Qué se hizo?}$$

$$24a^2x = 2^3 \cdot 3a^2x \quad \dots \text{ ¿Qué se hizo?}$$

¿Cuáles son los factores comunes y no comunes en su mayor exponente?

$$\text{M.C.M.} = 2^3 \cdot 3^2a^2x^2y^2(x + 5)(x - 5)(x - 4) \quad \dots \text{ Resp.}$$

$$= 72a^2x^2y^2(x + 5)(x - 5)(x - 4)$$

IMPORTANTE:

1. La Teoría del M.C.M. es de suma importancia para las fracciones y ecuaciones
2. Tanto en M.C.M. como el M.C.D., el resultado de ellos siempre queda expresado como el producto indicado de los factores.

GUIA DE ESTUDIO No. 11

Hallar el M.C.M. de los siguientes polinomios:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. 15; $3x - 6$ | 2. $36a^2$; $4ax - 12ay$ | 3. $12xy^2$; $2ax^2y^3 + 5x^2y^3$ |
| 4. mn ; m^2 ; $mn^3 - mn^2$ | 5. $2a^2b$; $3ax + 3a$; $6x - 18$ | 6. x^2 ; $x^3 + x^2 - 2x$; $x^2 + 4x + 4$ |
| 7. $6ab$; $x^2 - 4xy + 4y^2$; $9a^2x - 18a^2y$ | 8. a^2x^2 ; $4x^3 - 12x^2y + 9xy^2$; $2x^4 - 3x^3y$ | |
| 9. $8x^3$; $12x^2y^2$; $9x^2 - 45x$ | 10. an^3 ; $2n$; $n^2x^2 + n^2y^2$; $nx^2 + 2nxy + ny^2$ | |
| 11. $8x^2$; $x^3 + x^2 - 6x$; $2x^3 - 8x^2 + 8x$; $4x^3 + 24x^2 + 36$ | 12. $4xy^2$; $3x^3 - 3x^2$; $a^2 + 2ab + b^2$; $ax - a + bx - b$ | |
| 13. $3x^3$; $x^3 + 1$; $2x^2 - 2x + 2$; $6x^3 + 6x^2$ | 14. $2a$; $4b$; $6a^2b$; $12a^2 - 24ab + 12b^2$; $5ab^3 - 5b^4$ | |

2.4. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Interpretar y aplicar los pasos de la regla práctica para sumar expresiones algebraicas racionales.
- ♦ Interpretar y aplicar los pasos de la regla práctica para restar expresiones algebraicas racionales.
- ♦ Resolver ejercicios de adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales.

REGLA:

1. Se simplifican las expresiones dadas si es posible.
2. Se determina el M.C.M. de todos los denominadores.
3. Se divide el M.C.M. encontrado, entre cada denominador y este resultado se multiplica por cada numerador.
4. Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador y a todo este resultado se le pone como denominador, el M.C.M. encontrado.
5. Se reducen los términos semejantes en el numerador.
6. Se factoriza el numerador, si es posible.
7. Se simplifica la fracción resultante, si es posible.

Como puede apreciarse en el algoritmo anterior, la adición y sustracción de expresiones racionales algebraicas, tiene un algoritmo muy semejante a la adición y sustracción de números racionales vistos anteriormente.

Ejemplos: Efectuar y simplificar:

$$1. \quad \frac{1}{3x+3} + \frac{1}{2x-2} + \frac{1}{x^2-1}$$

Solución:

$$3x+3 = 3(x+1)$$

$$2x-2 = 2(x-1)$$

$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$\text{M.C.M.} = 6(x+1)(x-1)$$

$$= \frac{2(x-1) + 3(x+1) + 6}{6(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}$$

... M.C.M. de los denominadores. Paso 2 de la regla.

... Paso 3 de la regla.

... Paso 4 de la regla.

... Paso 5 de la regla. Los pasos 6 y 7 no son posibles de realizar.

... Resp.

$$2. \quad \frac{2}{x+x^2} - \frac{1}{x-x^2} - \frac{1-3x}{x-x^3}$$

Solución:

$$x+x^2 = x(1+x)$$

$$x-x^2 = x(1-x)$$

$$x-x^3 = x(1-x^2) = x(1+x)(1-x)$$

$$\text{M.C.M.} = x(1+x)(1-x)$$

$$= \frac{2(1-x) - (1+x) - (1-3x)}{x(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{2-2x-1-x-1+3x}{x(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{0}{x(1+x)(1-x)} = 0$$

$$= 0$$

... M.C.M. de los denominadores. Paso 2 de la regla.

... Paso 3 de la regla.

... Paso 4 de la regla.

... Paso 5 de la regla.

... Resp.

$$3. \quad \frac{a-1}{a^2-4} + \frac{a-2}{a^2-a-6} - \frac{a+6}{a^2-5a+6}$$

Solución:

$$a^2-4 = (a+2)(a-2)$$

$$a^2-a-6 = (a-3)(a+2)$$

$$a^2-5a+6 = (a-3)(a-2)$$

$$\text{M.C.M.} = (a+2)(a-2)(a-3)$$

$$= \frac{(a-1)(a-3) + (a-2)(a-2) + (a+2)(a+6)}{(a+2)(a-2)(a-3)}$$

... Paso 2 de la regla.

... ¿Qué se hizo?

$$= \frac{a^2 - 4a + 3 + a^2 - 4a + 4 + a^2 + 8a + 12}{(a+2)(a-2)(a-3)} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?}$$

$$= \frac{3a^2 + 19}{(a+2)(a-2)(a-3)} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?}$$

$$= \frac{3a^2 + 19}{(a+2)(a-2)(a-3)} \quad \dots \text{Resp.}$$

$$4. \quad \frac{1}{a^2 - ab} + \frac{1}{ab} - \frac{a^2 - b^2}{a^3b - ab^3}$$

Solución:

$$a^2 - ab = a(a - b) \quad \dots \text{¿Qué se hizo?}$$

$$ab = ab$$

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2)$$

$$\text{M.C.M.} = ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b) \quad \dots \text{M.C.M. de los denominadores}$$

$$= \frac{b(a + b) + (a + b)(a - b) - (a - b)(a + b)}{ab(a - b)(a + b)} \quad \dots \text{Paso 3 de la regla.}$$

$$= \frac{1}{a(a - b)} \quad \dots \text{Resp.}$$

¡Continúelo y compruebe la respuesta dada!

GUIA DE ESTUDIO No. 12

Efectuar las operaciones indicadas en las expresiones algebraicas racionales.

$$1. \quad \frac{2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$$

$$2. \quad \frac{3}{1-x} + \frac{6}{2x+5}$$

$$3. \quad \frac{2}{x-5} + \frac{3x}{x^2-5}$$

$$4. \quad \frac{1}{3x-2y} + \frac{x-y}{9x^2-4y^2}$$

$$5. \quad \frac{x+a}{x+3a} + \frac{3a^2-x^2}{x^2-9a^2}$$

$$6. \quad \frac{a}{1-a^2} + \frac{a}{1+a^2}$$

$$7. \quad \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}$$

$$8. \quad -\frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{x+x^2}$$

$$9. \quad \frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}$$

$$10. \quad -\frac{1}{12a+6} + \frac{a+1}{6a+3}$$

$$11. \quad \frac{a+b}{a^2+ab} - \frac{a-b}{ab+a^2}$$

$$12. \quad \frac{a+3}{a^2+a-12} - \frac{a-4}{a^2-6a+9}$$

$$13. \quad \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{4x-7}{x^2-x-6}$$

$$14. \quad \frac{a}{3a+6} - \frac{1}{6a+12} + \frac{a+12}{12a+24}$$

$$15. \quad \frac{a+3}{a^2-1} + \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a-4}{4a-4}$$

$$16. \quad \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{4x^2}{x^2-y^2}$$

2.5. OPERACIONES COMBINADAS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Aplicar las prioridades de las operaciones cuando hay combinación de ellas.
- ♦ Calcular la expresión en su forma reducida de expresiones algebraicas racionales que contienen operaciones combinadas.
- ♦ Resolver proposiciones que contienen expresiones algebraicas racionales con operaciones combinadas.

En las secciones anteriores tratamos la adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales, así como su multiplicación y división. En todos los casos la respuesta final fue una fracción en forma reducida. En esta sección se usarán las cuatro operaciones en un solo problema y también requerirá que la respuesta final sea una fracción reducida.

Cuando no hay símbolos de agrupación en el problema, primero se efectúan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen. Solamente después de que todas las multiplicaciones y divisiones se han realizado, se efectúan las adiciones y sustracciones.

Ejemplos. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

$$1. \quad \frac{5}{2x+1} - \frac{2x+6}{x^2-4x+3} \div \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-3x+1}$$

Solución:

$$= \frac{5}{2x+1} - \frac{2(x+3)}{(x-3)(x-1)} \div \frac{(2x-1)(x+3)}{(2x-1)(x-1)}$$

... Factorizando los denominadores

$$= \frac{5}{2x+1} - \frac{2(\cancel{x}+3)}{(x-3)(\cancel{x}-1)} \times \frac{(2\cancel{x}-1)(\cancel{x}-1)}{(2\cancel{x}-1)(\cancel{x}+3)}$$

... Escribiendo la división como la inversa de la multiplicación. Operando y simplificando.

$$= \frac{5}{2x+1} - \frac{2}{x-3} = \frac{5(x-3) - 2(2x+1)}{(2x-1)(x-3)}$$

... Calculando M.C.M. de los denominadores y operando en el numerador.

$$= \frac{5x-15-4x-2}{(2x+1)(x-3)} = \frac{x-17}{(2x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{x-17}{(2x-1)(x-3)}$$

... Resp.

Cuando hay símbolos de agrupación como en el problema $\left(x - \frac{4x}{x+2}\right)\left(3 + \frac{12}{x-2}\right)$ se tiene la opción de efectuar primero la multiplicación o bien las operaciones de los términos, dentro de los paréntesis. Esto último es más sencillo como se ilustra en los ejemplos siguientes:

$$2. \quad \left(x - \frac{4x}{x+2}\right)\left(3 + \frac{12}{x-2}\right)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x(x+2)-4x}{(x+2)} \times \frac{3(x-2)+12}{(x-2)} \\
 &= \frac{x^2+2x-4x}{(x+2)} \times \frac{3x-6+12}{(x-2)} \\
 &= \frac{x^2-2x}{(x+2)} \times \frac{3x+6}{(x-2)} \\
 &= \frac{x(x-2)}{(x+2)} \times \frac{3(x+2)}{(x-2)} = 3x \\
 &= 3x
 \end{aligned}$$

... Aplicando M.C.M de los denominadores en cada paréntesis y operando.

... Efectuando operaciones indicadas en los numeradores.

... Reduciendo términos semejantes en los numeradores.

... Factorizando numerador y simplificando.

... Resp.

$$3. \left(x - \frac{9}{2x-3} \right) \div \left(x + \frac{9}{2x+9} \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x(2x-3)-9}{(2x-3)} \div \frac{x(2x+9)+9}{(2x+9)} \\
 &= \frac{2x^2-3x-9}{(2x-3)} \div \frac{2x^2+9x+9}{(2x+9)} \\
 &= \frac{(2x+3)(x-3)}{(2x-3)} \times \frac{(2x+9)}{(2x+3)(x+3)} \\
 &= \frac{(x-3)(2x+9)}{(2x-3)(x+3)}
 \end{aligned}$$

... Explique lo que se hizo en cada paso.

... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 13

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

$$1. \frac{2}{x+3} + \frac{3x+3}{x^2-2x-8} \times \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$2. \frac{3}{x-2} - \frac{8x-4}{2x^2-5x-3} \times \frac{x^2-x-6}{2x^2+3x-2}$$

$$3. \frac{3x^2+3x}{3x^2-8x+4} \times \frac{x^2+2x-8}{x^2+5x+4} - \frac{2x}{2x-1}$$

$$4. \frac{x}{2x-3} + \frac{3x+12}{x^2-4x-12} \div \frac{x^2+8x+16}{x^2+6x+8}$$

$$5. \frac{1}{x-1} + \frac{12x^2-4x}{4x^2-11x-3} \div \frac{3x^2+8x-3}{x^2-9}$$

$$6. \frac{6x^2-12x}{2x^2+3x-9} \div \frac{2x^2-5x+2}{2x^2+5x-3} - \frac{3}{x+1}$$

$$7. \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{x}{x^2-1} \right)$$

$$8. \left(2 - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{x^2}{4x^2-1} \right)$$

9. $\left(3 + \frac{3}{x}\right)\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

10. $\left(6 + \frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{9x^2 - 1}\right)$

11. $\left(4 - \frac{10}{x}\right)\left(\frac{2x}{4x^2 - 25}\right)$

12. $\left(9 - \frac{6}{x}\right)\left(\frac{3x}{9x^2 - 4}\right)$

13. $\left(3 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{3x + 1}\right)$

14. $\left(5 - \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{5x - 2}\right)$

15. $\left(x - \frac{9}{x}\right)\left(1 - \frac{3}{x + 3}\right)$

16. $\left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x - 2}\right)$

17. $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{x}{x + 1}\right)$

18. $\left(2 - \frac{9}{2x^2}\right)\left(x + \frac{3x}{2x - 3}\right)$

19. $\left(3x - \frac{4}{3x}\right)\left(x - \frac{2x}{3x + 2}\right)$

20. $\left(x - \frac{3}{4x - 1}\right)\left(x - \frac{1}{4x + 3}\right)$

21. $\left(x - \frac{24}{x + 2}\right)\left(x - \frac{12}{x - 4}\right)$

22. $\left(x - \frac{1}{2x - 1}\right)\left(x - \frac{1}{2x + 1}\right)$

23. $\left(x + \frac{4x}{x - 3}\right)\left(x - 2 - \frac{4}{x + 1}\right)$

24. $\left(x - \frac{x}{x - 1}\right)\left(x + 4 + \frac{5}{x - 2}\right)$

25. $\left(x - 1 - \frac{3}{x + 1}\right)\left(2x + 5 + \frac{9}{x - 2}\right)$

26. $\left(x - 3 - \frac{7}{x + 3}\right)\left(3x - 1 + \frac{10}{x + 4}\right)$

27. $\left(3x - 5 + \frac{13}{2x + 3}\right)\left(2x - 1 - \frac{26}{3x - 2}\right)$

28. $\left(\frac{x}{4} - \frac{4}{x}\right)\left(\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x - 4}\right)$

29. $\left(x - \frac{1}{x}\right) \div \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

30. $\left(4 - \frac{9}{x^2}\right) \div \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{x^2}\right)$

31. $\left(6 - \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2}\right) \div \left(8 - \frac{10}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$

32. $\left(12 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) \div \left(8 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$

33. $\left(1 + \frac{4}{2x - 3}\right) \div \left(3 + \frac{4}{2x - 3}\right)$

34. $\left(1 + \frac{6}{3x - 5}\right) \div \left(2 + \frac{7}{3x - 5}\right)$

35. $\left(3 - \frac{4}{3x + 2}\right) \div \left(4 - \frac{7}{3x + 2}\right)$

36. $\left(2 - \frac{3}{2x + 1}\right) \div \left(7 - \frac{9}{2x + 1}\right)$

37. $\left(x + \frac{2}{x+3}\right) \div \left(1 - \frac{2}{x+3}\right)$

38. $\left(x - \frac{2}{3x-1}\right) \div \left(1 - \frac{2}{3x-1}\right)$

39. $\left(x - \frac{3}{2x+5}\right) \div \left(x - \frac{12}{x-1}\right)$

40. $\left(x - \frac{4}{3x+4}\right) \div \left(x + \frac{2}{3x-5}\right)$

 *

GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 2

Simplificar las siguientes expresiones racionales:

1. $\frac{8m^4n^3x^2}{24mn^2x^2}$

2. $\frac{12x^3y^4x^5}{32xy^2z}$

3. $\frac{12a^2b^3}{60a^3b^5x^6}$

4. $\frac{2lmn^3x^6}{28m^4n^2x^6}$

5. $\frac{42a^2c^3n^3}{26a^4c^5m^2}$

6. $\frac{75a^7m^5}{100a^3m^5n}$

7. $\frac{3ab}{2a^2x + 2a^3}$

8. $\frac{xy}{3x^2y - 3xy^2}$

9. $\frac{2ax + 4bx}{3ay + 6by}$

10. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

11. $\frac{x^2 - 4}{5ax + 10a}$

12. $\frac{10a^2b^3c}{80(a^3 - a^2b)}$

13. $\frac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6}$

14. $\frac{x^2 + 5x + 6}{15x^2 - 7x - 2}$

15. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

16. $\frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3}$

Encontrar el M.C.M. de los siguientes grupos de polinomios:

17. $x^2 - 3x$; $2x - 6$; $7x - 21$

18. $x^2 - x$; $x^3 - x^2$; $2x - 2$

19. $x^2 - 2x$; $x^2 - 4$; $x^2 + 2x$

20. $x^2 - 3x - 4$; $x^2 + 3x + 2$; $x^2 - 2x - 8$

21. $x^2 + x - 6$; $x^2 + 2x - 8$; $x^2 + 7x + 12$

22. $x^2 - 8x + 12$; $x^2 - 6x + 8$; $x^2 - 10x + 24$

23. $3x^2 + 7x + 2$; $2x^2 + 5x + 2$; $6x^2 + 5x + 1$

24. $2(3n - 2)^2$; $135n^3 - 40$; $12n - 8$

25. $3x^2 + 11x - 4$; $2 - 5x - 3x^2$; $x^2 + 6x + 8$

26. $3x^2 - x - 14$; $x^2 + 7x + 10$; $35 - 8x - 3x^2$

Efectuar y simplificar las siguientes expresiones:

$$27. \frac{6x}{x^2 - 9} + \frac{x}{x + 3}$$

$$28. \frac{4x}{x^2 - 4} + \frac{x}{x + 2}$$

$$29. \frac{3x}{x^2 + x - 2} + \frac{x}{x + 2}$$

$$30. \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x - 3} + \frac{x}{2x^2 - 9x + 9}$$

$$31. \frac{3x - 2}{2x^2 - 3x - 3} - \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4}$$

$$32. \frac{7x + 14}{3x^2 + 10x - 8} - \frac{x + 6}{3x^2 + x - 2}$$

$$33. \left(\frac{14x^2 - 21x}{24x - 16} \right) \cdot \left(\frac{12x - 8}{42x - 63} \right)$$

$$34. \left(\frac{30x^3 - 18x^2}{6x^3 + 5x^2} \right) \cdot \left(\frac{42x + 35}{60x - 36} \right)$$

$$35. \left(\frac{60x^3 - 30x}{6x^2 + 2x} \right) \cdot \left(\frac{3x^2 - x}{4x^2 - 20} \right)$$

$$36. \left(\frac{xy^5}{x^2 + 6x + 8} \right) \cdot \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{xy^2} \right)$$

$$37. \left(\frac{4x^3 + 8x + 3}{6x^2 - x - 2} \right) \cdot \left(\frac{6x^2 - 7x + 2}{6x^2 - 7x - 3} \right)$$

$$38. \left(\frac{16x^2 - 20x + 6}{12x^3 + 7x^2 - 12x} \right) \cdot \left(\frac{6x^3 + 17x^2 + 12x}{24x^2 - 52x + 20} \right)$$

$$39. \frac{x^2 + 3x - 21}{x^2 + 3x - 28} \div \frac{x^2 + 14x + 48}{x^2 + 4x - 32}$$

$$40. \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 12x + 32} \div \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 + 3x - 40}$$

$$41. \frac{3x^2 - 8x + 4}{4x^2 - 5x - 6} \div \frac{3x^2 + x - 2}{4x^2 + 7x + 3}$$

$$42. \frac{x^2 - xy - 12y^2}{x^2 - 3xy - 18y^2} \div \frac{4y^2 + 7xy - 2x^2}{x^2 - 7xy + 6y^2}$$

$$43. \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^2 - 2xy - 3y^2} \div \frac{y^2 + 2xy - 3x^2}{y^2 + 4xy + 3x^2}$$

$$44. \frac{2x^2 - 9xy + 9y^2}{3x^2 - 13xy + 12y^2} \div \frac{6x^2 - 19xy + 15y^2}{3x^2 + 14xy + 24y^2}$$

$$45. \left(x - 5 - \frac{7}{x + 1} \right) \div \left(x - 4 - \frac{14}{x + 1} \right)$$

$$46. \left(x - 6 - \frac{10}{x + 3} \right) \div \left(x + 2 - \frac{2}{x + 3} \right)$$

$$47. \left(x - 2 - \frac{16}{x - 2} \right) \div \left(x + 5 - \frac{4}{x - 2} \right)$$

$$48. \left(x + 1 - \frac{8}{x - 1} \right) \div \left(x + 7 + \frac{16}{x - 1} \right)$$

$$49. \left(x - 3 + \frac{6}{2x + 1} \right) \div \left(x + 1 - \frac{6}{2x + 1} \right)$$

$$50. \left(3x - 4 + \frac{11}{2x + 3} \right) \div \left(3x - 10 + \frac{33}{2x + 3} \right)$$

RESPUESTAS

1. $\frac{m^3n}{3}$

3. $\frac{1}{5ab^2x^6}$

5. $\frac{21}{13a^2c^2}$

7. $\frac{3b}{2a(x+a)}$

9. $\frac{2x}{3y}$

11. $\frac{x-2}{5a}$

13. $\frac{3x+5}{x-2}$

15. $\frac{x-y}{x+y}$

17. $14x(x-3)$

19. $x(x+2)(x+3)$

21. $(x+3)(x-2)(x+4)$

23. $(3x+1)(x+2)(2x+1)$

25. $(1-3x)(x+4)(x+2)$

27. $\frac{x}{x-3}$

29. $\frac{x}{x-1}$

31. $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

33. $\frac{x}{6}$

35. $\frac{3x}{4}$

37. $\frac{2x-1}{3x-1}$

39. $\frac{x-3}{x+6}$

41. 1

43. $\frac{x-2y}{x-3y}$

45. $\frac{x+2}{x+3}$

47. $\frac{x^2-4x-12}{x^2+3x-14}$

49. $\frac{2x-3}{2x+5}$

 *

UNIDAD 3. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RADICALES

3.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RADICALES. SIMPLIFICACION

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Establecer procedimientos para identificar expresiones algebraicas radicales y escribirlas en forma simplificada.
- ♦ Comprender el significado de expresión algebraica radical y conocer sus propiedades.
- ♦ Aplicar procedimientos de operatoria con las expresiones algebraicas radicales.

DEFINICION: Una **expresión algebraica radical**, es toda raíz indicada de una expresión algebraica.

$$3.5x\sqrt{x^3y}; \quad 3x^2\sqrt[3]{x^4y^3}; \quad -\frac{3}{4}\sqrt[3]{-27a^3y^2z^6}; \quad \sqrt{(16x^2 - 24xy + 9y^2)}$$

DEFINICION: Si $a \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

y

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Significa que: “**Todo radical se puede expresar como una potencia fraccionaria y viceversa.**”

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \diamond \sqrt{x+3} &= (x+3)^{1+2} & \diamond x^{4+5} &= \sqrt[5]{x^4} & \diamond 3x^{3+4} &= 3\sqrt[4]{x^3} \\ \diamond -3x^{1+2}(2x-y)^{2+3} &= -3\sqrt{x} \left(\sqrt[3]{(2x-y)^2} \right) & \diamond 2(xy)^{3+2} &= 2\sqrt{(xy)^3} \end{aligned}$$

DEFINICION: Se dice que un radical es **raíz perfecta**, si el radicando se puede expresar como un producto de factores, cada uno de los cuales con un exponente que sea un múltiplo entero del índice del radical.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^{10}} &= x^{10+2} = x^5 \\ \sqrt[3]{8x^6y^9} &= \sqrt[3]{2^3x^6y^9} = 2^{3+3}x^{6+3}y^{9+3} = 2x^2y^3 \quad \dots \text{Aplicando la definición y el exponente fraccionario.} \\ -5\sqrt[4]{81x^8y^{12}} &= -5\sqrt[4]{3^4x^8y^{12}} \quad \dots \text{Escribiendo los términos de la expresión, como potencia.} \\ &= -5(3^{4+4}x^{8+4}y^{12+4}) \\ &= -5(3x^2y^3) \quad \dots \text{Operando en los exponentes.} \\ &= -15x^2y^3 \quad \dots \text{Resp.} \end{aligned}$$

SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RADICALES

La idea de la simplificación de expresiones algebraicas radicales, es la misma estudiada anteriormente, en la que siempre debe cumplirse que:

1. El radical sea positivo cuando el índice de la raíz sea par.
2. El índice del radical es el menor posible.
3. El exponente de cada factor del radicando, sea un número natural menor que el índice de la raíz.
4. No hay radicales en el denominador de ninguna fracción.

IMPORTANTE:



1. Si n es par y $a > 0$; entonces $\sqrt[n]{-a} \notin \mathbb{R}$
2. Si n es impar y $a < 0$; entonces $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Ejemplo 1. Simplificar $\sqrt{8x^3y^2z^5}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{8x^3y^2z^5} &= \sqrt{2^3x^3y^2z^5} \\
 &= \sqrt{(2^2 \cdot 2)(x^2 \cdot x)y^2(z^4 \cdot z)} \\
 &= \sqrt{2^2x^2y^2z^4} \cdot \sqrt{2xz} \\
 &= 2xyz^2\sqrt{2xz}
 \end{aligned}$$

- ... Escribiendo como potencia: $8 = 2^3$.
- ... Descomponiendo las potencias del radicando, como un producto de dos factores; una con exponente menor que el índice de radical y la otra con exponente múltiplo del índice del radical.
- ... Propiedad multiplicativa de las raíces.
Operando
- ... **Resp.**

Ejemplo 2. Simplificar $\sqrt[3]{16x^6y^5z^{10}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{16x^6y^5z^{10}} &= \sqrt[3]{2^4x^6y^5z^{10}} \\
 &= \sqrt[3]{(2^3 \cdot 2)x^6(y^3 \cdot y^2)(z^9 \cdot z)} \\
 &= \sqrt[3]{2^3x^6y^3z^9} \cdot \sqrt[3]{2y^2z} \\
 &= \sqrt[3]{2x^2yz^3} \cdot \sqrt[3]{2y^2z} \\
 &= 6x^2yz^3\sqrt[3]{2y^2z}
 \end{aligned}$$

- ... Escribiendo como potencia: $8 = 2^3$.
- ... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?
- ... Propiedad multiplicativa de las raíces.
Operando.
- ... Propiedad de los exponentes fraccionarios aplicada al primer radical y operando.
- ... **Resp.**

Ejemplo 3. Simplificar $\sqrt[3]{-2x^{11}y^4}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-2x^{11}y^4} &= -\sqrt[3]{2(x^9 \cdot x^2)(y^3 \cdot y)} && \dots \text{ ¿Qué se hizo?} \\ &= -\sqrt[3]{x^9 y^3 \cdot 2x^2 y} && \dots \text{ ¿Qué se hizo?} \\ &= -\sqrt[3]{x^3 y^3 2x^2 y} && \dots \text{ ¿Qué se hizo?} \\ &= -x^3 y^3 \sqrt[3]{2x^2 y} && \dots \text{ Resp.}\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Simplificar $\sqrt[4]{-8x^4y^2}$ ¿Se puede efectuar en el conjunto R? Explique.

IMPORTANTE:



1. $\sqrt[n]{a^n b^n} = ab$

2. $\sqrt[n]{(a \pm b)^n} = (a \pm b)$

3. $\sqrt[n]{a^n \pm b^n} \neq (a \pm b)$ *No se puede aplicar a la adición ni a la sustracción.*

GUIA DE ESTUDIO No. 14

Escribir las siguientes expresiones en su forma radical:

1. $x^{1+2}y^2$

2. $x^{1+2}y^{1+2}$

3. $(2x)^{1+2}$

4. $(3x)^{3+2}$

5. $(xy)^{1+2}$

6. $(xy)^{2+3}$

7. $(x+3)^{1+3}$

8. $(x-2)^{1+2}$

9. $(x^{1+2} + y^{1+3})$

Escribir las siguientes expresiones con exponentes fraccionarios:

10. $3^4 x^2$

11. $7^5 x^4$

12. $\sqrt[3]{x^3 y^5}$

13. $4 x^3 y^3$

14. $\sqrt[4]{x^4 y^8}$

15. $\sqrt{xy^2}$

16. $3 x^3 y^5$

17. $\sqrt{(x+3)^3}$

18. $\sqrt[2]{x^2 + 9}$

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas radicales:

19. $\sqrt[3]{9x^3 y^4}$

20. $\sqrt[3]{50x^2 y^5}$

21. $\sqrt[3]{8x^2 y^3 z^5}$

22. $\sqrt[3]{48x^3 y^2 z^3}$

23. $\sqrt[3]{16x^2 y^5 z^7}$

24. $\sqrt[3]{27x^4 y^3 z^5}$

25. $\sqrt[3]{20x^3 yz^6}$

26. $\sqrt[3]{4x^3 (x^2 - y^2)}$

27. $\sqrt[3]{x^4 y^5 (x+y)^2}$

28. $\sqrt[3]{-x^4 y^5}$

29. $\sqrt[3]{-x^7 y^3}$

30. $\sqrt[3]{125xy^3}$

31. $\sqrt[5]{x^2 y^5 z^{10}}$

32. $\sqrt[5]{16a^6 b^4}$

33. $\sqrt[3]{-64a^3 x^6 y^{18}}$

34. $\sqrt[5]{-243m^5 n^{15}}$

35. $\sqrt[3]{81x^6 y^8 z^{20}}$

36. $\sqrt[4]{81a^{12} b^{24}}$

3.2. ADICION Y SUSTRACCION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RADICALES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Proponer procedimientos para sumar y restar expresiones algebraicas radicales.
- ♦ Comprender el proceso de adición y sustracción de expresiones algebraicas radicales.
- ♦ Plantear y resolver ejercicios de aplicación de la adición y sustracción de expresiones algebraicas radicales.

REGLA: Para sumar y restar expresiones algebraicas radicales, se simplifican todos los radicales (si es posible), se efectúan las operaciones indicadas con los coeficientes y se combinan o reducen los radicales semejantes empleando la Propiedad Distributiva.

Ejemplo 1. Simplificar $x\sqrt{147y^3} + y\sqrt{75x^2y} - \sqrt{48x^2y^3}$ y reducir radicales semejantes.

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= x\sqrt{3 \cdot 7^2 y^2} \cdot y + y\sqrt{3 \cdot 5^2 x^2 y} - \sqrt{2^4 \cdot 3x^2 y^2} \cdot y \quad \dots \text{Simplificando cada radical.} \\
 &= x\sqrt{7^2 y^2} \cdot \sqrt{3y} + y\sqrt{5^2 x^2} \cdot \sqrt{3y} - \sqrt{2^4 \cdot x^2 y^2} \cdot \sqrt{3y} \quad \dots \text{Propiedad Multiplicativa de las Raíces.} \\
 &= 7xy\sqrt{3y} + 5xy\sqrt{3y} - 4xy\sqrt{3y} \quad \dots \text{Propiedad de los exponentes fraccionarios.} \\
 &= (7xy + 5xy - 4xy)\sqrt{3y} \quad \dots \text{Propiedad Distributiva y operando.} \\
 &= 8xy\sqrt{3y} \quad \dots \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Simplificar y reducir término semejantes: $\sqrt[6]{a^8 b^8} - a^3 \sqrt[3]{8ab^4} - b^3 \sqrt[3]{27a^4 b}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[6]{a^6 \cdot a^2 b^6 b^2} - a^3 \sqrt[3]{2^3 ab^3 b} - b^3 \sqrt[3]{3^3 a^3 ab} \quad \dots \text{Simplificando cada radical.} \\
 &= \sqrt[6]{a^6 b^6} \cdot \sqrt[6]{a^2 b^2} - a^3 \left(\sqrt[3]{2^3 b^3} \cdot \sqrt[3]{ab} \right) - b^3 \left(\sqrt[3]{3^3 a^3} \cdot \sqrt[3]{ab} \right) \quad \dots \text{Propiedad Multiplicativa de las Raíces.} \\
 &= ab\sqrt[6]{a^2 b^2} - a(2b^3\sqrt[3]{ab}) - 3ab^3\sqrt[3]{ab} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?} \\
 &= ab\sqrt[6]{a^2 b^2} - 2ab^3\sqrt[3]{ab} - 3ab^3\sqrt[3]{ab} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?} \\
 &= ab\sqrt[6]{a^2 b^2} + (-2ab^3\sqrt[3]{ab} - 3ab^3\sqrt[3]{ab}) \quad \dots \text{Propiedad distributiva en radicales semejantes.} \\
 &= ab\sqrt[6]{a^2 b^2} - 5ab^3\sqrt[3]{ab} \quad \dots \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Efectuar $\sqrt[3]{54x^7y^3} + \frac{1}{y}\sqrt[3]{16x^7y^6} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{128x^{10}y^3}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2x^6 \cdot xy^3} + \frac{1}{y}\sqrt[3]{2^3 \cdot 2x^6y^6x} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{2^6 \cdot 2x^9xy^3} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?} \\
 &= \sqrt[3]{3^3x^6y^3} \cdot \sqrt[3]{2x} + \frac{1}{y}\sqrt[3]{2^3x^6y^6} \cdot \sqrt[3]{2x} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{2^6x^9y^3} \cdot \sqrt[3]{2x} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?} \\
 &= 3x^2y\sqrt[3]{2x} + \frac{1}{y}(2x^2y^2\sqrt[3]{2x}) - \frac{1}{x}(2^2x^3y\sqrt[3]{2x}) \quad \dots \text{¿Qué se hizo?} \\
 &= 3x^2y\sqrt[3]{2x} + 2x^2y\sqrt[3]{2x} - 4x^2y\sqrt[3]{2x} \quad \dots \text{Operando y simplificando.} \\
 &= (3x^2y + 2x^2y - 4x^2y)\sqrt[3]{2x} \quad \dots \text{¿Qué se hizo?} \\
 &= x^2y\sqrt[3]{2x} \quad \dots \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

GUIA DE ESTUDIO No. 15

Simplificar y efectuar:

- $\sqrt{25a^4x^2} + \sqrt{49b} - \sqrt{9ax^2}$
- $2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2}$
- $a\sqrt{320x} - 7\sqrt{5a^2x} - (a - 4b)\sqrt{5x}$
- $\sqrt{9x - 9} + \sqrt{4x - 4} - 5\sqrt{x - 1}$
- $3\sqrt[3]{2a^3} - b\sqrt[3]{128} + (4b - 3a)\sqrt[3]{2}$
- $a\sqrt[3]{250b} - \sqrt[3]{3ab^3} - 5\sqrt[3]{2a^3b} + 3b\sqrt[3]{3a}$
- $\sqrt{9x} + \sqrt{25x} - \sqrt[3]{8x} - \sqrt[3]{27x}$
- $\sqrt{24x^2} + \sqrt[3]{24x^4} - \sqrt{54x^2} + \sqrt[3]{81x^4}$
- $x\sqrt[3]{8xy^3} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{x^7y^3} - \frac{1}{y}\sqrt[3]{64x^4y^6}$
- $\sqrt[3]{54x^7y^3} + \frac{1}{y}\sqrt[3]{16x^7y^6} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{128x^{10}y^3}$
- $\sqrt{125a^5} + a\sqrt{27a^2} + \sqrt{64a^{10}}$
- $\sqrt{9a^3b^3} + a\sqrt{16a^2b^6} - \sqrt{a^9b^3}$

3.3. MULTIPLICACION Y DIVISION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RADICALES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el estudiante podrá:

- ♦ Proponer procedimientos para multiplicar y dividir expresiones algebraicas radicales.
- ♦ Comprender el proceso de la multiplicación y división de expresiones algebraicas radicales.
- ♦ Plantear y resolver ejercicios de aplicación sobre la multiplicación y división de expresiones algebraicas radicales.

La multiplicación y división de expresiones algebraicas radicales es posible, aplicando la propiedad multiplicativa de las raíces y la propiedad distributiva.

REGLA: Para multiplicar expresiones algebraicas radicales del mismo orden, se multiplican los signos y coeficientes; después se multiplican las cantidades subradicales y este producto se coloca bajo el signo radical del mismo orden que el de los factores y se simplifica el radical resultante, si es posible.

Ejemplo 1. Efectuar y simplificar: $2\sqrt{3xy}(4\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= 8\sqrt{3x^2y} - 6\sqrt{3xy^2} && \dots \text{ Propiedad distributiva y la regla.} \\
 &= 8\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{3y} - 6\sqrt{y^2} \cdot \sqrt{3x} && \dots \text{ Propiedad multiplicativa de las raíces y simplificando.} \\
 &= 8x\sqrt{3y} - 6y\sqrt{3x} && \dots \text{ Resp.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Efectuar y simplificar: $(\sqrt{3x} - \sqrt{2y})(5\sqrt{3x} + 2\sqrt{2y})$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= 5\sqrt{9x^2} + 2\sqrt{6xy} - 5\sqrt{6xy} - 2\sqrt{4y^2} && \dots \text{ Propiedad distributiva y la regla.} \\
 &= 5(3x) - 3\sqrt{6xy} - 2(2y) && \dots \text{ Propiedad multiplicativa de las raíces y simplificando.} \\
 &= 15x - 4y - 3\sqrt{6xy} && \dots \text{ Resp.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Efectuar y simplificar: $(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2})^2$

Solución:

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{x+3})^2 + 2(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-2}) + (\sqrt{x-2})^2 && \dots \text{ Desarrollando el producto notable.} \\
 &= x+3 + 2\sqrt{x^2} + x-6 + x-2 && \dots \text{ Efectuando operaciones indicadas y reduciendo términos.} \\
 &= 2x+1 + 2\sqrt{x^2} + x-6 && \dots \text{ Resp.}
 \end{aligned}$$

IMPORTANTE:



1. $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 \neq a \pm b$
2. $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) = a \pm 2\sqrt{ab} + b$

DIVISION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RADICALES

Si $a, b \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$, $b > 0$; $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

La propiedad anterior, es conocida como **propiedad del cociente de raíces**; permite realizar la división entre dos expresiones algebraicas radicales cuando dichas expresiones tienen radicales del mismo índice.

Ya se sabe que la **racionalización** de un denominador, permite escribir una expresión radical, sin el radical en el denominador.

Ejemplo 1. Simplificar: $\frac{\sqrt{x^3 y^5}}{\sqrt{x^2 y}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^3 y^5}}{\sqrt{x^2 y}} &= \sqrt{\frac{x^3 y^5}{x^2 y}} \\ &= \sqrt{xy^4} = \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{x} = y^2 \sqrt{x} \\ &= y^2 \sqrt{x} \end{aligned}$$

... Propiedad del cociente de raíces.

... Simplificando dentro del radical y aplicando la propiedad multiplicativa de las raíces.

... **Resp.**

Ejemplo 2. Simplificar: $\frac{\sqrt{100x^8 y^4 z^3}}{\sqrt{4x^3 y^2 z}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{100x^8 y^4 z^3}}{\sqrt{4x^3 y^2 z}} &= \sqrt{\frac{100x^8 y^4 z^3}{4x^3 y^2 z}} \\ &= \sqrt{25x^5 y^2 z^2} \\ &= \sqrt{5^2 x^4 y^2 z^2} \cdot \sqrt{x} \\ &= 5x^2 yz \sqrt{x} \end{aligned}$$

... Propiedad del cociente de raíces.

... Simplificando dentro del radical.

... Propiedad multiplicativa.

... ¿Qué se hizo? ... **Resp.**

Algunas veces el numerador de la expresión radical no es múltiplo exacto del denominador; para simplificarlo, es necesario **racionalizar el denominador**. Cuando se desea racionalizar el denominador **monomio** de una expresión algebraica radical, se multiplica el numerador y el denominador por una misma expresión algebraica radical que haga que el denominador sea **una raíz perfecta**.

Ejemplo 1. Racionalizar el denominador de: $\frac{3a}{\sqrt{2a^3}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{3a}{2\sqrt{a^3}} &= \frac{3a}{2\sqrt{a^2 \cdot a}} = \frac{3a}{2a\sqrt{a}} \\ &= \frac{3a}{2a\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{3a\sqrt{a}}{2a\sqrt{a^2}} \\ &= \frac{3a\sqrt{a}}{2a^2} = \frac{3\sqrt{a}}{2a} \\ &= \frac{3\sqrt{a}}{2a}\end{aligned}$$

... Simplificando el denominador.

... Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{a}$, que es el factor que le hace falta al denominador para ser raíz perfecta. Operando.

... Simplificando

... ¿Qué se hizo? ... **Resp.**

Ejemplo 2. Racionalizar el denominador de: $\frac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{4a^3b}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{4a^3b}} &= \frac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{2^2a^3b}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{\sqrt{3xyab}}{\sqrt{2^2a^4b^2}} = \frac{\sqrt{3xyab}}{2a^2b} \\ &= \frac{\sqrt{3xyab}}{2a^2b}\end{aligned}$$

... Lo que le hace falta al denominador para ser raíz perfecta.

... Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{ab}$.
¿Porqué? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo?

... **Resp.**

Ejemplo 3. Racionalizar el denominador de: $\frac{\sqrt{7x} - \sqrt{2y}}{\sqrt{14xy}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{7x} - \sqrt{2y}}{\sqrt{14xy}} &= \frac{\sqrt{7x} - \sqrt{2y}}{\sqrt{14xy}} \cdot \frac{\sqrt{14xy}}{\sqrt{14xy}} \\ &= \frac{(\sqrt{7x} - \sqrt{2y})(\sqrt{14xy})}{\sqrt{14xy}\sqrt{14xy}} \\ &= \frac{\sqrt{98x^2y} - \sqrt{28xy^2}}{\sqrt{14^2x^2y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{7^2x^2} \cdot \sqrt{2y} - \sqrt{2^2y^2} \cdot \sqrt{7x}}{\sqrt{14^2x^2y^2}} \\ &= \frac{7x\sqrt{2y} - 2y\sqrt{7x}}{14xy} = \frac{\sqrt{2y}}{2y} - \frac{\sqrt{7x}}{7x}\end{aligned}$$

... ¿Qué representa éste término?

... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo?

... Propiedad distributiva en el numerador y también la propiedad multiplicativa de las raíces.

... Propiedad multiplicativa de las raíces.

... Simplificando.

... **Resp.**

Si se multiplican las expresiones radicales $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, se obtiene una expresión: $(a - b)$. Cada una de las expresiones $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ y $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ se llama **conjugado** o **factor racionalizador** de la otra. Generalmente se escribe con una barra encima de la expresión, la que se lee: “El conjugado de...”. Así:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ que se lee: } \quad \text{“El conjugado de } (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \text{ es } (\sqrt{a} - \sqrt{b})\text{”} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ que se lee: } \quad \text{“El conjugado de } (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \text{ es } (\sqrt{a} + \sqrt{b})\text{”}\end{aligned}$$

Lo anterior permite establecer que: para racionalizar una expresión algebraica radical, se multiplica y divide la expresión dada por el **conjugado del denominador** se efectúan las operaciones resultantes y se simplifica el radical que queda, si es posible.

Ejemplo 1. Racionalizar el denominador de: $\frac{2\sqrt{x}}{3 - 2\sqrt{x}}$

Solución:

$$\begin{aligned}3 - 2\sqrt{x} &= 3 + 2\sqrt{x} \\ \frac{2\sqrt{x}}{3 - 2\sqrt{x}} &= \frac{2\sqrt{x}}{3 - 2\sqrt{x}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{x}}{3 + 2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(3 + 2\sqrt{x})}{(3 - 2\sqrt{x})(3 + 2\sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x}(3 + 2\sqrt{x})}{3^2 - (2\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{6\sqrt{x} + 4\sqrt{x}^2}{9 - 4\sqrt{x}^2} = \frac{6\sqrt{x} + 4x}{9 - 4x} \\ &= \frac{6\sqrt{x} + 4x}{9 - 4x}\end{aligned}$$

... Calculando el conjugado del denominador.

... Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador.

... Propiedad distributiva en el numerador y un producto notable en el denominador. ¿Cuál?

... Operando y simplificando.

... Resp.

Ejemplo 2. Racionalizar el denominador de: $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{a} + \sqrt{x}}$

Solución:

$$\begin{aligned}2\sqrt{a} + \sqrt{x} &= 2\sqrt{a} - \sqrt{x} \\ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{a} + \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{a} + \sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{a} - \sqrt{x}}{2\sqrt{a} - \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})(2\sqrt{a} - \sqrt{x})}{(2\sqrt{a})^2 - (\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{a}^2 - \sqrt{ax} + 2\sqrt{ax} - \sqrt{x}^2}{4\sqrt{a}^2 - \sqrt{x}^2} \\ &= \frac{2a - x + \sqrt{ax}}{4a - x}\end{aligned}$$

... ¿Qué representa esta expresión?

... ¿Qué se hizo? ¿Para qué?

... ¿Qué se hizo?

... Operando y reduciendo términos.

... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 16

Efectuar las operaciones indicadas y reducir términos semejantes:

1. $(\sqrt{2x} + \sqrt{y})(\sqrt{2x} + \sqrt{3y})$
2. $(3x + \sqrt{2y})(3x - \sqrt{2y})$
3. $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2$
4. $(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$
5. $(2\sqrt{x} - 4\sqrt{y})(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$
6. $(5\sqrt{xy} - 4\sqrt{x})^2$
7. $(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2$
8. $(x^2 - 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$
9. $(\sqrt{xy} - 3\sqrt{x})^2$
10. $(\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x})^2$
11. $(6 - \sqrt{2x} + 1)^2$
12. $(4 - \sqrt{2x} - 3)^2$
13. $(\sqrt{a} + \sqrt{a+1})(\sqrt{a} + 2\sqrt{a+1})$
14. $(2\sqrt{a} - 3\sqrt{a-b})(3\sqrt{a} + \sqrt{a-b})$
15. $(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})^2$
16. $(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})(\sqrt{a+1} + 2\sqrt{a-1})$
17. $(2\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} - 3)$
18. $(3\sqrt{a} - 2\sqrt{a+x})^2$
19. $(3\sqrt{a} - 2\sqrt{a+x})(2\sqrt{a} + 3\sqrt{a+x})$
20. $(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} - 2\sqrt{a-x})$

GUIA DE ESTUDIO No. 17

Racionalizar el denominador de las siguientes expresiones algebraicas radicales:

1. $\frac{x + 2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$
2. $\frac{x + \sqrt{y}}{3\sqrt{y}}$
3. $\frac{2x + 2\sqrt{y}}{3\sqrt{xy}}$
4. $\frac{\sqrt{5x} - \sqrt{2y}}{\sqrt{10x}}$
5. $\frac{\sqrt{14x} - \sqrt{2y}}{\sqrt{21xy}}$
6. $\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{5y}}{\sqrt{15xy}}$
7. $\frac{\sqrt{6x} + \sqrt{15y}}{\sqrt{30xy}}$
8. $\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{5y}}{\sqrt{21xy}}$
9. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{5y}}{\sqrt{30xy}}$
10. $\frac{5x}{3\sqrt{x^3}}$
11. $\frac{2x\sqrt{y}}{3x\sqrt{y^3}}$
12. $\frac{5x - 2\sqrt{y}}{3xy\sqrt{x^3y}}$
13. $\frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}$
14. $\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2x} - \sqrt{y}}$
15. $\frac{\sqrt{3x} + 6}{2\sqrt{6x} - \sqrt{3y}}$
16. $\frac{\sqrt{15x} - \sqrt{6y}}{4\sqrt{5x} - \sqrt{y}}$
17. $\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{5y}}{\sqrt{3x} + \sqrt{5y}}$
18. $\frac{2 - \sqrt{3x}}{2 + \sqrt{3x}}$

19. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

20. $\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2y}}{2\sqrt{3x} - \sqrt{2y}}$

21. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{a} + \sqrt{x}}$

22. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$

23. $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}$

24. $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 3

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas radicales

1. $\sqrt[4]{4a^2b^4}$

2. $\sqrt[3]{25x^6y^8}$

3. $\sqrt[3]{27a^3b^9}$

4. $\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}}$

5. $\sqrt[4]{64x^8y^{10}}$

6. $\sqrt[4]{16a^8b^{16}}$

7. $\sqrt[3]{-64a^3x^6y^{18}}$

8. $\sqrt[5]{-243m^5n^{15}}$

9. $\sqrt[5]{x^{15}y^{20}z^{25}}$

10. $\sqrt[4]{81a^{12}b^{24}}$

11. $\sqrt[3]{-2x^{11}y^4}$

12. $\sqrt[3]{-x^3y}$

13. $\sqrt[3]{-x^4y^5}$

14. $\sqrt[3]{-x^7y^3}$

15. $\sqrt[3]{x^3yz^6}$

16. $\sqrt[4]{81x^2y^6}$

17. $\sqrt{x^2y^4}(y-2)^3$

18. $\sqrt{xy^2}(x+2)^3$

Efectuar y simplificar las siguientes expresiones:

19. $\sqrt{25ax^2} + \sqrt{49b} - \sqrt{9ax^2}$

20. $2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2}$

21. $a\sqrt{320x} - 7\sqrt{5a^2x} - (a-4b)\sqrt{5x}$

22. $\sqrt{24x} + \sqrt[3]{24x^4} - \sqrt{54x^2} + \sqrt[3]{81x^4}$

23. $\sqrt{9x-9} + \sqrt{4x-4} - 5\sqrt{x-1}$

24. $\sqrt[3]{54x^7y^3} + \frac{1}{y}\sqrt[3]{16x^7y^6} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{128x^{10}y^3}$

25. $\sqrt[4]{75a^3} + \sqrt[3]{-24a^4} + \sqrt[4]{729a^6}$

26. $\sqrt[6]{a^8b^8} - a\sqrt[3]{8ab^4} - b\sqrt[3]{27a^4b}$

27. $\sqrt[3]{125a^5} - a\sqrt[3]{27a^2} + \sqrt[6]{64a^{10}}$

28. $\sqrt{9a^3b^3} + a\sqrt[4]{16a^2b^6} - b\sqrt[6]{a^9b^3}$

Efectuar las multiplicaciones indicadas y simplificar:

29. $3\sqrt{xy}\sqrt{y}$

30. $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$

31. $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

32. $\sqrt{xy}(\sqrt{xy}+x)$

33. $\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-x)$

34. $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)$

35. $(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-3x)$

36. $(\sqrt{x}-2\sqrt{5})^2$

37. $(\sqrt{2x}+\sqrt{3y})^2$

38. $(\sqrt{2x+3})(\sqrt{2x-3})$

39. $(\sqrt{2x} - \sqrt{x+1})^2$

40. $(2\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

41. $3 \div \sqrt{75x}$

42. $10 \div \sqrt{12x}$

43. $x \div \sqrt{15y}$

44. $\sqrt{3x} \div \sqrt{2x^2y}$

45. $5x \div \sqrt{8x^2y^3}$

46. $(\sqrt{5x} - \sqrt{2y}) \div \sqrt{10xy}$

47. $(\sqrt{14x} - \sqrt{3y}) \div \sqrt{21xy}$

48. $(\sqrt{2x} + \sqrt{y}) \div (\sqrt{x} - \sqrt{2y})$

49. $(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) \div (3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$

50. $(\sqrt{a} - \sqrt{a+1}) \div (\sqrt{a} + \sqrt{a+1})$

51. $(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) \div (\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$

52. $(\sqrt{a+4} - \sqrt{a}) \div (\sqrt{a+4} + \sqrt{a})$

RESPUESTAS

1. $2ab^2$

3. $3ab^3$

5. $8x^4y^5$

7. $-4ax^2y^6$

9. $x^3y^4z^5$

11. $-x^3y\sqrt[3]{2x^2y}$

13. $-xy^3\sqrt{xy^2}$

15. $xz^2\sqrt[3]{8x}$

17. $xy^2(y-2)\sqrt{y-2}$

19. $2x\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

21. $4b\sqrt{5x}$

23. 0

25. $8a\sqrt{3a} + 2a^3\sqrt{3a}$

27. $10a^3\sqrt{a^2}$

29. $3y\sqrt{x}$

31. $x(x-1)$

33. $x\sqrt{y-1}$

35. $2 - 2x\sqrt{2} - 3x^2$

37. $2x + 2\sqrt{6xy} + 3y$

39. $3x + 1 - 2\sqrt{2x(x+1)}$

41. $\frac{\sqrt{3x}}{5x}$

43. $\frac{15xy}{15y}$

45. $\frac{\sqrt{10xy}}{4xy^2}$

47. $\frac{\sqrt{6y}}{3y} - \frac{\sqrt{7x}}{7x}$

49. $\frac{3x+4y+8\sqrt{xy}}{9x-4y}$

51. $\frac{x+4+2\sqrt{2x+4}}{x}$

UNIDAD 4. ECUACIONES LINEALES Y CUADRATICAS

4.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON COEFICIENTES RACIONALES Y CON SIGNOS DE AGRUPACION. DESPEJES. APLICACIONES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Establecer procedimientos para resolver una ecuación lineal.
- ♦ Comprender el proceso de resolución de una ecuación lineal, tanto con coeficientes racionales como con signos de agrupación.
- ♦ Aplicar las propiedades de los números reales para despejar una variable dentro de una ecuación dada.
- ♦ Resolver problemas con aplicación de ecuaciones lineales.

De acuerdo a lo estudiado en el curso anterior, ya se conoce lo que es una ecuación lineal, lo que es un conjunto solución C.S. y el procedimiento general a seguir para resolver la ecuación. La técnica que se emplea en la solución de una ecuación lineal, contiene los siguientes pasos:

1. Si la ecuación dada contiene fracciones, ésta debe ser expresada de forma equivalente, que no contenga fracciones, mediante la aplicación del Mínimo Común Múltiplo de los denominadores.
2. Efectuar las operaciones indicadas, si las hay o las que quedan con la aplicación del paso anterior.
3. Efectuar la transposición de términos semejantes. Las variables en un miembro de la ecuación y las constantes en el otro.
4. Reducir los términos semejantes en ambos miembros.
5. Despejar la variable.
6. Comprobar si el valor encontrado para la variable pertenece al dominio dado y si satisface las condiciones de la ecuación original.
7. Determinar el C.S.

Ejemplos: Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones:

$$1. \quad \frac{2x-3}{9} - \frac{x-5}{6} = \frac{3-x}{2} + 1$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{m.c.m. } (9, 6, 2) &= 2 \times 3 \times 3 = 18 \\ 2(2x-3) - 3(x-5) &= 9(3-x) + 18(1) \\ 4x - 6 - 3x + 15 &= 27 - 9x + 18 \\ 4x - 3x + 9x &= 27 + 18 - 15 + 6 \\ 10x &= 36 \\ x &= \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \\ \text{C.S.} &= \left\{ \frac{18}{5} \right\} \end{aligned}$$

- ... Calculando el m.c.m. de los denominadores
- ... Aplicando el m.c.m.
- ... Efectuando operaciones indicadas.
- ... Transponiendo términos semejantes.
- ... Reduciendo términos semejantes.
- ... Despejando la variable. Simplificando.
- ... Resp.

$$2. \quad \frac{5}{6}(6x - 7) - \frac{3}{8}(3x - 2) = \frac{2}{3}(5x - 6)$$

Solución:

$$\frac{30x}{6} - \frac{35}{6} - \frac{9x}{8} + \frac{6}{8} = \frac{10x}{3} - \frac{12}{3}$$

... ¿Qué se hizo?

$$5x - \frac{35}{6} - \frac{9x}{8} + \frac{3}{4} = \frac{10x}{3} - 4$$

... Simplificando cada fracción

$$\text{m.c.m. (6, 8, 4, 3)} = 24$$

... ¿Qué se hizo?

$$24(5x) - 4(35) - 3(9x) + 6(3) = 8(10x) - 24(4)$$

... ¿Qué se hizo?

$$120x - 140 - 27x + 18 = 80x - 96$$

... Efectuando operaciones indicadas.

$$120x - 27x - 80x = -96 - 18 + 140$$

... ¿Qué se hizo?

$$13x = 26$$

... ¿Qué se hizo?

$$x = \frac{26}{13} = 2$$

... ¿Qué se hizo?

$$\text{C.S.} = \{ 2 \}$$

... **Resp.**

En ocasiones se puede presentar también la solución de ecuaciones que contienen signos de agrupación. El proceso de solución explicado antes, siempre es útil con el agregado que deben eliminarse los signos de agrupación, siguiendo los lineamientos ya conocidos y explicados en el curso anterior.

Ejemplos: Determinar el C.S. de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$1. \quad 5x + \{-2x + (-x + 6)\} = 18 - \{-(7x + 6) - (3x - 24)\} - 2$$

Solución:

$$5x + \{-2x - x + 6\} = 18 - \{-7x - 6 - 3x + 24\} - 2$$

... Suprimiendo los ().

$$5x + \{-3x + 6\} = 18 - \{-10x + 18\} - 2$$

... Reduciendo los términos dentro de los corchetes.

$$5x - 3x + 6 = 18 + 10x - 18 - 2$$

... Suprimiendo las llaves.

$$5x - 3x - 10x = 18 - 18 - 6 - 2$$

... Transponiendo términos semejantes.

$$-8x = -8$$

... Reduciendo términos semejantes.

$$x = \frac{-8}{-8} = 1$$

... Despejando la variable.

$$\text{C.s.} = \{ 1 \}$$

... **Resp.**

$$2. \quad 3x - 2\{2(x - 1)\} = 7x - 3\{-(3 - 5x) + (-x + 24)\} + 61$$

Solución:

$$3x - 2\{2(x - 1)\} = 7x - 3\{-(3 - 5x) + (-x + 24)\} + 61$$

... ¿Qué se hizo?

$$3x - 2\{2x - 2\} = 7x - 3\{4x + 21\} + 61$$

... ¿Qué se hizo?

$$3x - 4x + 4 = 7x - 12x - 63 + 61$$

... ¿Qué se hizo?

$$-x + 4 = -5x - 63 + 61$$

$$-x + 5x = -63 + 4 + 61$$

$$4x = -6$$

$$x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{C.S.} = -\frac{3}{2}$$

... Explique lo que se hace en cada uno de los siguientes pasos.

... Resp.

$$3. \quad 2\{x - 3[2(x + 3)] - 4x\} = (2x - 1)(2x + 1) - 4x^2 - 3(x - 2)$$

Solución:

!!! RESUELVALA UD. COMO TAREA DE LA CLASE !!!

GUIA DE ESTUDIO No. 18

Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones:

$$1. \quad \frac{3x + 2x}{2} = \frac{10 + 4}{2}$$

$$2. \quad \frac{3x + 5x}{2} = 3$$

$$3. \quad \frac{8x + 4x}{2} = \frac{8 + 10}{3}$$

$$4. \quad \frac{3x}{4} - \frac{3x + 5}{6} = 1$$

$$5. \quad \frac{x - 2}{3} + 1 = \frac{x}{7}$$

$$6. \quad \frac{3x}{24} - \frac{2 - x}{10} = \frac{5 + x}{40} - \frac{1}{15}$$

$$7. \quad \frac{2x - 3}{9} - \frac{x + 5}{6} = \frac{3 - x}{2} + 1$$

$$8. \quad 1 - \frac{2x - 3}{5} + \frac{x}{3} = \frac{2}{5} - \frac{1 - x}{15}$$

$$9. \quad \frac{3}{4} = 8 - \frac{2x - 11}{3}$$

$$10. \quad \frac{x - 7}{2} = \frac{x + 2}{11}$$

$$11. \quad \frac{5}{6}(x - 9) + \frac{3}{4}(x - 1) = -13$$

$$12. \quad \frac{3}{2}(x + 4) + \frac{2}{3}(x - 1) = 14$$

$$13. \quad \frac{5(x - 2)}{4} - \frac{7(x - 30)}{6} = \frac{2}{3}$$

$$14. \quad \frac{10 - x}{3} - \frac{3(1 - 4x)}{8} = \frac{5(2x + 7)}{24}$$

$$15. \quad \frac{2(x + 3)}{5} - \frac{2x - 1}{2} = \frac{3(2 - x)}{4}$$

$$16. \quad \frac{3(1 - x)}{2} - \frac{4x + 5}{3} = \frac{5(x - 1)}{6}$$

$$17. \quad \frac{2 - 7x}{4} + \frac{5(3x - 4)}{9} = -2$$

$$18. \quad \frac{3(2x - 3)}{11} + \frac{x - 1}{3} = x - 2$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES. APRENDIENDO A DESPEJAR UNA VARIABLE DE UNA ECUACION DADA

En todos los campos que tienen que ver con números, se usan fórmulas o ecuaciones con variables. En ciertas aplicaciones es necesario encontrar la solución para una variable particular, en términos de las variables restantes que aparecen en la fórmula. Esto se hace, considerando la ecuación como si la variable deseada fuera la única presente y transformando la ecuación original en otra equivalente donde la variable solo aparece en un lado. A este proceso se le conoce con el nombre de *despeje*, el que está basado exactamente en los pasos descritos en la técnica empleada en la solución de una ecuación. Los siguientes ejemplos ilustran el despeje, basado en las propiedades aditiva y multiplicativa de los Números Reales.

Ejemplos: Las fórmulas dadas a continuación, se presentan en la teoría y las aplicaciones de la Matemática y la Física. Resolver cada fórmula para la variable indicada, en términos de las variables restantes.

1. $P\ell = 2 + 2w$; para w

Solución:

$$-2w = -P\ell + 2$$

... Transponiendo términos que contienen la variable w .

$$2w = P\ell - 2$$

... Multiplicando por -1 toda la ecuación ¿para qué?

$$w = \frac{P\ell - 2}{2}$$

... Dividiendo por 2 para despejar w .

$$w = \frac{P\ell - 2}{2}$$

... Resp.

2. $F = g \frac{pq}{d^2}$; para d

Solución:

$$F = g \frac{pq}{d^2}$$

... Efectuando la multiplicación indicada.

$$d^2 F = gpq$$

... Aplicando m.c.m. de los denominadores: m.c.m.(1, d^2) = d^2

$$d^2 = \frac{gpq}{F}$$

... Dividiendo por F para despejar d

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{\frac{gpq}{F}}$$

... Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros.

$$d = \sqrt{\frac{gpq}{F}}$$

... Despejando d .

... Resp.

3. $S = 2R(N - 2)$; para N

Solución:

$$\begin{aligned} S &= 2R(N - 2) \\ S &= 2RN - 4R \\ -2RN &= -S - 4R \\ 2RN &= S + 4R \end{aligned}$$

$$N = \frac{S + 4R}{2R}$$

$$N = \frac{S + 4R}{2R}$$

4. $R = \frac{nE - r\ell}{n\ell}$; para n y ℓ

Solución:

$$R = \frac{nE - r\ell}{n\ell}$$

$$n\ell R = nE - r\ell$$

$$n\ell R - nE = -r\ell$$

$$n(\ell R - E) = -r\ell$$

$$n = \frac{-r\ell}{\ell R - E}$$

$$n = \frac{-r\ell}{\ell R - E}$$

Despejando ahora a ℓ , se tiene:

$$n\ell R = nE - r\ell$$

$$n\ell R + r\ell = nE$$

$$\ell(nR + r) = nE$$

$$\ell = \frac{nE}{nR + r}$$

$$\ell = \frac{nE}{nR + r}$$

... Fórmula dada.

... Efectuando operaciones indicadas.

... Transponiendo términos.

... Multiplicando por -1 toda la ecuación.
¿Para qué?

... Dividendo por $2R$, para despejar N .

... Resp.

... Fórmula dada.

... Aplicando m.c.m. de los denominadores.
m.c.m. $(n\ell, 1) = n\ell$

... Transponiendo al primer miembro, todos los términos que contienen la variable n .

... Reduciendo términos que contienen a n , mediante la aplicación del *factor común*.
Despejando n .

... Resp.

... ¿Qué se hizo en la ecuación dada?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 19

Resolver o despejar cada fórmula, para la(s) variable(s) indicada(s).

1. $A = Prt$; para P, r

2. $A = \frac{1}{2}bh$; para h, b

3. $A = P + Prt$; para t, P

4. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; para h, π

5. $S = \frac{a}{\ell - r}$; para r, a

6. $m = \frac{y - r}{z - w}$; para r, w

7. $S = \frac{1}{2}gt^2 + vt$; para g, v

8. $V = \frac{1}{3}h\pi(3r - h)$; para r, h, π

En los ejercicios del 9 al 16, resolver para la variable t .

9. $ct - 5 = 9$

10. $2(1 + at) = 24$

11. $5at + b = c$

12. $2t - 4v = a - v$

13. $Rt = C + Lt$

14. $3at + 2 = at$

15. $t(r - s) = 2r - 4st$

16. $g(vt + n) = t - n$

17. $v = v_0 + at$, es una ecuación para la velocidad de una partícula. Resolver para t .

18. La potencia de un resistor está dada por $P = i^2R$. Resolver para R .

19. La relación entre la temperatura en $^{\circ}\text{F}$ y la temperatura $^{\circ}\text{C}$ es $^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{C} + 32$. Resolver para $^{\circ}\text{C}$.

20. El área de un cilindro está dada por $A = 2\pi r(r + h)$. Resolver para h .

21. El nivel de energía de un objeto es $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$. Resolver para m .

22. La ecuación para el desplazamiento de un objeto que cae libremente es $S = V_0t + \frac{1}{2}t^2$. Resolver para V_0 .

23. La fórmula que describe la dilatación lineal de una varilla metálica cuando se calienta es $L = L_0(1 + \alpha t)$. Resolver para α .

24. $i = \frac{E}{R + r}$ es una fórmula que se usa en el análisis de los circuitos de cd. Resolver para R .

25. La siguiente fórmula nos permite resolver un triángulo oblicuángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Resolver para $\cos A$.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

En el curso anterior, se aprendió a convertir una frase dada en lenguaje corriente en otra que contenía variables; es decir, en lenguaje simbólico. Además, aprendió también a resolver problemas sencillos. En esta parte, se continuará con la solución de problemas, con un grado mayor de dificultad que los del curso anterior.

Ejemplos: Plantear, resolver y comprobar, los siguientes problemas:

1. Hallar dos números cuya suma sea 27 y que el séxtuplo del menor supere en 9 unidades al triple del mayor.

Solución:

Sea:

$ \begin{aligned} x &= \text{número mayor} \\ 27 - x &= \text{número menor} \\ 6x &= 3(27 - x) + 9 \\ 6x &= 81 - 3x + 9 \\ 3x + 6x &= 81 + 9 \\ 9x &= 90 \\ x &= 10 \end{aligned} $	... Planteo del problema ... Resolviendo la ecuación que resulta del planteo.
Luego: número mayor: $x = 10$ número menor: $(27 - x) = 27 - 10 = 17$ Los Números son: el menor = 10 el mayor = 27	... Resp.

2. La suma de 3 números es 63. El segundo número es el doble del primero, y el tercero supera en 3 al segundo. Determinar los números.

Solución:

Sea:

$ \begin{aligned} x &= \text{primer número} \\ 2x &= \text{segundo número} \\ (2x + 3) &= \text{tercer número} \\ x + 2x + (2x + 3) &= 63 \\ x + 2x + 2x + 3 &= 63 \\ x + 2x + 2x &= 63 - 3 \\ 5x &= 60 \\ x &= 12 \end{aligned} $	... Planteo del problema ... Resolviendo la ecuación que resulta del planteo.
Luego: primer número: $x = 12$ segundo número: $(2x) = 2(12) = 24$ tercer número: $(2x + 3) = 2(12) + 3 = 27$ Los Números son: el primero = 12 el segundo = 24 el tercero = 27	... Resp.

3. La edad de Juan es el doble de la de Pedro y hace 15 años la edad de Juan era el triplo de la de Pedro. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea:

x = edad actual de Pedro

$2x$ = edad actual de Juan

$2x - 15$ = edad de Juan hace 15 años

$x - 15$ = edad de Pedro hace 15 años

$2x - 15 = 3(x - 15)$

... Planteo del problema

$2x - 15 = 3x - 45$

... Resolviendo la ecuación que resulta del planteo.

$2x - 3x = -45 + 15$

$-x = -30$

$x = 30$ Luego: edad actual de Pedro: = 30 años

edad actual de Juan: $2(30) = 60$ años

Edad Actual de: Pedro = 30 años

... Resp.

Juan = 60 años

4. La edad de María es el triplo de la de Sonia y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea:

x = edad actual de Sonia.

$3x$ = edad actual de María.

$3x + 20$ = edad de María dentro de 20 años.

$x + 20$ = edad de Sonia dentro de 20 años.

$3x + 20 = 2(x + 20)$

... Planteo del problema

$3x + 20 = 2x + 40$

... Resolviendo la ecuación que resulta de el planteo.

$3x - 2x = 40 - 20$

$x = 20$ Luego: edad actual de Sonia: = 20 años

edad actual de María: $3(20) = 60$ años

Edad actual de: Sonia = 20 años

... Resp.

María = 60 años

*

GUIA DE ESTUDIO No. 20

Resolver los siguientes problemas en hojas adicionales de trabajo.

1. La suma de dos números es 34. El quíntuplo del menor supera en 10 al triplo del mayor. Encontrar los números.
2. La diferencia de dos números es 5. Si el triplo del mayor supera en uno al quíntuplo del menor, encontrar los números.
3. Un número supera en 7 a otro. Determinar ambos números si el doble del mayor excede al triplo del menor en 2.
4. Un número es 9 unidades menor que otro. Hallar los números si tres medios del mayor superan al menor en 3.

5. La suma de 3 números es 44. El segundo es el doble del primero, y el tercer número es 4 menos que el primero. ¿Cuáles son los números?
6. La suma de 3 números es 78. El segundo es el doble del primero y el tercero es el triplo del primero. Hallar los números.
7. La suma de 3 números es 94. El segundo es 2 unidades menor que el primero, y el tercero supera en 6 al primero. Hallar los números.
8. La edad actual de A es el doble que la de B, y hace 10 años la edad de A era el triplo de la de B. Hallar las edades actuales.
9. La edad de A es el triplo que la de B y dentro de 5 años será el doble. Hallar las edades actuales.
10. La edad de un padre es el triplo de la edad de su hijo. La edad que tenía el padre hace 5 años era el doble de la edad que tendría su hijo dentro de 10 años. Hallar las edades actuales.
11. A tiene doble dinero que B. Si A pierde L. 10.00 y B pierde L. 5.00, A tendrá L. 20.00 más que B. ¿Cuánto tiene cada uno?
12. El precio actual del litro de leche es el doble, aumentado en L. 0.45 que el precio de hace 5 años. Si el precio actual es de L. 2.70. ¿Cuál era el precio en aquella época?

xxxxx
xxxx
x

4.2. ECUACIONES CUADRÁTICAS. CONCEPTUALIZACIÓN Y COMPONENTES. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA. APLICACIONES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Establecer procedimientos para resolver una ecuación cuadrática incompleta y completa.
- ♦ Identificar la naturaleza y el tipo de soluciones de una ecuación cuadrática, mediante el uso del discriminante.
- ♦ Comprender el proceso de resolución de una ecuación cuadrática por factorización y por la fórmula general.
- ♦ Resolver problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas.

Una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ corresponde a un polinomio cuadrático en su forma canónica. Si un polinomio de este tipo es igualado a cero se tiene lo que se llama una **ecuación cuadrática** o de **segundo grupo**.

En muchas aplicaciones de la matemática o de las ciencias, es necesario encontrar el Conjunto Solución (C.S.) de una ecuación cuadrática o determinar una o más propiedades de alguna función cuadrática. Cualquier ecuación equivalente a la expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

se llama **ecuación cuadrática en una variable**. Toda ecuación cuadrática tiene cuando más **dos soluciones**. En la expresión anterior, se tiene que:

- a = Coeficiente del término cuadrático.
 b = Coeficiente del término lineal.
 c = Término independiente; y
 C.S. = $\{x_1, x_2\}$ = **Conjunto Solución de la Ecuación**

Las siguientes proposiciones corresponden a ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$	donde $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$	2. $2x^2 + 5x = 0$	donde $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 0 \end{cases}$
3. $6x^2 - 10 = 0$	donde $\begin{cases} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -10 \end{cases}$	4. $x^2 + 5(x - 3) = -1$	donde $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -14 \end{cases}$

IMPORTANTE:



1. Una ecuación cuadrática que tiene sus tres términos básicos, se llama **ecuación cuadrática completa**. Ejemplos:

$$3x^2 + 5x - 1 = 0 \quad 2x^2 = 5x + 3; \quad 2 = -x^2 + 3$$

2. Una ecuación cuadrática en la que falta el término de primer grado o si su término independiente es cero, se llama **ecuación cuadrática incompleta**. Ejemplos:

$$x^2 + 5 = 0; \quad -3x^2 = 0; \quad x(x - 2) = 0$$

3. Toda ecuación que contenga operaciones indicadas deben efectuarse y al final, escribir la ecuación resultante en su forma canónica, es decir, en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACION CUADRÁTICA INCOMPLETA

En la solución de una ecuación cuadrática **incompleta**, se necesita recordar algunas propiedades de los números reales, la técnica de factorización **factor común**, los pasos utilizados en el despeje de una variable y, la siguiente propiedad de R:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$

Que significa: “**Si el producto de dos números reales es cero, al menos uno de ellos es cero**”.

Ejemplos: Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + b = 0$; $a \neq 0$ y $b \geq 0$

1. $4x^2 - 16 = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 16 &= 0 \\
 4x^2 &= 16 \\
 x^2 &= \frac{16}{4}
 \end{aligned}$$

... Es cuadrática incompleta.

... Escribiéndola en la forma $ax^2 = \pm b$, mediante transposición.

$$x^2 = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$\text{C.S.} = \{-2, 2\}$$

... Despejando la variable.

... Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros.

... Resp.

Son las soluciones

2. $3x^2 - 2 = 0$

Solución:

$$3x^2 - 2 = 0$$

$$3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

... Ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + b = 0$

... Despejando la variable.

... Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros y racionalizando.

... Resp.

Son las soluciones

3. $5x^2 + 25 = 0$

Solución:

$$5x^2 + 25 = 0$$

$$5x^2 = -25$$

$$x^2 = -\frac{25}{5} = -5$$

$$x = \pm \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$$

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

... ¿Qué tipo de ecuación es?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

... ¿Porqué?

... Resp.

Es la solución

IMPORTANTE:



1. En las ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 = b$, siempre debe ser $a \neq 0$ y $b \geq 0$; es decir, el término independiente en el segundo miembro, debe ser positivo o cero.
2. Si $b < 0$, la solución de $ax^2 = b$, no es un número real; es decir, su solución es vacía.
3. La solución de este tipo de ecuaciones, se hace mediante despeje directo y teniendo el cuidado de colocar el signo $\pm$ antes de la raíz cuadrada en el segundo miembro.

Los ejemplos siguientes corresponden a la solución de una ecuación cuadrática *incompleta* de la forma $ax^2 + bx = 0$. El proceso de solución implica usar la factorización y específicamente la técnica del *factor común*.

Ejemplos: Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$.

1. $4x^2 = 8x$

Solución:

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x + 2) = 0$$

$$4x = 0 \quad \text{ó} \quad (x + 2) = 0$$

$$x = \frac{0}{4} \quad \text{ó} \quad x = -2$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -2$$

$$\text{C.S.} = \{0, -2\}$$

... Trasponiendo 8x al primer miembro, para tener siempre 0 en el segundo.

... Factorizando. Factor Común

... Aplicando la propiedad dada, de que: $a \cdot b = 0$ y, resolviendo las 2 ecuaciones

... Resp.

Son las soluciones

2. $6x^2 - 4x = 0$

Solución:

$$6x^2 - 4x = 0$$

$$2x(3x + 2) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{ó} \quad (3x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{C.S.} = \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$$

... Ecuación dada.

... Factorizando: Factor Común

... ¿Qué se hizo? ¿Porqué?

... Resp.

Son las soluciones

IMPORTANTE:1. La técnica de factorización para resolver una ecuación cuadrática *incompleta* de la forma $ax^2 + bx = 0$ será siempre el *factor común*.

2. El cero (0), siempre será una de las soluciones de este tipo de ecuaciones cuadráticas.

GUIA DE ESTUDIO No. 21

Determinar el C.S. de cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 - 4 = 0$

2. $x^2 - 2 = 0$

3. $x^2 - 36 = 0$

4. $2x^2 - 18 = 0$

5. $2x^2 - 12 = 0$

6. $2x^2 + 36 = 0$

7. $3x^2 + 4 = 0$

8. $4x^2 - 16 = 0$

9. $2x^2 - 1 = 0$

10. $3x^2 + 3 = 0$

11. $3x^2 + 6x = 0$

12. $6x^2 - 4x = 0$

13. $10x^2 - 15x = 0$

14. $2x^2 - 4x = 0$

15. $5x^2 + 5x = 0$

16. $4x^2 - 16x = 0$

17. $18x^2 = 6x$

18. $16x^2 = 8x$

19. $12x^2 = -6x$

20. $4x^2 = -5x$

*

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACION CUADRATICA

Como se dejó dicho antes, una ecuación cuadrática tiene cuando mas, dos raíces o soluciones. Para encontrar estas raíces y determinar el C.S. se emplean dos métodos: **factorización** y **fórmula general** o **resolvente**. En ambos métodos, antes de determinar el C.S. es necesario ver si las posibles soluciones pertenecen al dominio dado. El método de Factorización se usa muy poco para resolver una ecuación cuadrática a menos que el polinomio cuadrático que la define, se pueda factorizar sobre el conjunto Z.

La fórmula general es una fórmula de las más importantes de toda la matemática elemental. Para la obtención de dicha fórmula se emplea la técnica de factorización **completacion de cuadrados** y las propiedades de los números reales. La obtención de la fórmula se hace a continuación para que el alumno se de cuenta que tiene un origen.

OBTENCION DE LA FORMULA GENERAL PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRATICAS

1. Sea $ax^2 + bx + c = 0$

... a, b, c son números reales; $a \neq 0$.

2. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

... Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{a}$

3. $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

... Trasponiendo $\frac{c}{a}$

4. $x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

... Sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos miembros y completando el cuadrado del miembro de la izquierda.

5. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

... Factorizando el miembro de la izquierda y efectuando operaciones en el de la derecha.

6. $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

... Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros y simplificando.

7. $x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

... Transponiendo $\frac{b}{2a}$

8. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

... Operando ambos términos del miembro a la derecha.

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

... **Fórmula General**

Es importante recordar que ésta fórmula da dos soluciones, una con signo más (+) y otra con signo (-). La expresión: $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y nos permite conocer sin resolver, la naturaleza de las raíces de la ecuación conforme al cuadro No. 2 de la página siguiente.

Si $b^2 - 4ac > 0$	La ecuación tiene dos soluciones reales y diferentes.
$b^2 - 4ac = 0$	La ecuación tiene dos soluciones reales e iguales.
$b^2 - 4ac < 0$	La ecuación tiene dos soluciones imaginarias.

Cuadro No. 2

Ejemplos: Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 5x = -6$

Solución:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$a = 1; b = 5; c = 6$$

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \in \mathbb{R}$$

... Forma canónica.

... Valores de a, b, c.

... Como el discriminante es mayor que 0, las raíces son reales y diferentes.

... Aplicando la fórmula general.

Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1 = -2 \text{ entonces } (-2)^2 + 5(-2) + 6 &= 0 \\ 4 - 10 + 6 &= 0 \\ -6 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Luego C.S.} = \{-3, -2\}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x_2 = -3 \text{ entonces } (-3)^2 + 5(-3) + 6 &= 0 \\ 9 - 15 + 6 &= 0 \\ -6 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

... Resp.

Son las soluciones

2. $4 - 12x = -9x^2$

Solución:

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$a = 9; b = -12; c = 4$$

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(9)(4)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12 \pm 0}{18}$$

... Forma canónica.

... Valores de a, b, c.

... Raíces reales e iguales porque el discriminante es 0.

... Aplicando la fórmula general.

$$x_1 = \frac{12+0}{18} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \frac{12-0}{18} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

Comprobación:

Si $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$ entonces $4 - 12\left(\frac{2}{3}\right) = -9\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$4 - \frac{24}{3} = -9\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$4 - 8 = -4$$

$$-4 = -4$$

Luego: C.S. = $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

... Sustituyendo el valor de x encontrado, en la ecuación dada.

... Operando.

... Se cumple la igualdad.

... **Resp.** **Es la solución**

3. $3x^2 = 4x - 5$

Solución:

$$3x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$a = 3; b = -4; c = 5$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(3)(5) \\ &= 16 - 60 \\ &= -44 < 0 \end{aligned}$$

Luego: C.S. = $\emptyset$

... Forma canónica.

... Valores de a, b, c.

... Calculando el valor del discriminante.

... Soluciones imaginarias, porque el discriminante es menor que cero.

... **Resp.** **Es la solución**

4. $\frac{x^2}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3}{10}$

Solución:

$$\frac{x^2}{5} - \frac{x}{2} - \frac{3}{10} = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$a = 2; b = -5; c = -3$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49 \\ &= 49 > 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

... Forma canónica.

... m.c.m. (5, 2, 10) = 10. Efectuando operaciones en que el m.c.m. se divide por cada denominador y este resultado se multiplica por el numerador y se escribe en forma canónica.

... Valores de a, b, c, o sea valores de los coeficientes de la ecuación.

... Calculando el valor del discriminante. Este es mayor que cero, entonces las soluciones son reales y diferentes.

... Sustituyendo en la fórmula y operando.

GUIA DE ESTUDIO No. 23

Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones:

1. $(x - 5)^2 = 9$

2. $(2x - 3)^2 - 16 = 0$

3. $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = 3(x - 5)$

4. $\frac{1}{4}(x - 4) + \frac{2}{5}(x - 5) = \frac{1}{5}(x^2 - 53)$

5. $(x + 2)^2 - \frac{2x - 5}{3} = 3$

6. $\frac{3x + 2}{4} = 5 - \frac{9x^2 + 14}{12}$

7. $\frac{1}{4}x + 3(x - 6) = x\left(x - \frac{3}{2}\right)$

8. $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}(x - 15) = x^2 - 5$

9. $x(x + 3) = 5x + 3$

10. $3(3x - 2) = (4 - x)(4 + x)$

11. $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$

12. $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -23$

13. $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$

14. $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

15. $7(x - 3) - 5(x^2 - 1) = x^2 - 5(x + 2)$

16. $x^2 - (7x + 6) = x + 59$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Plantear y resolver los siguientes problemas:

1. Encontrar dos números enteros positivos y consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 113.

Solución:

Sea:

x = Primer número entero.

$x + 1$ = El otro entero consecutivo.

$$x^2 + (x + 1)^2 = 113$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 113$$

$$2x^2 + 2x - 112 = 0$$

$$a = 2; b = 2; c = -112$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-112)}}{2(2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 896}}{4}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{900}}{4} = \frac{-1 \pm 30}{4}$$

... Planteando la ecuación: la suma de sus cuadrados.

... Reduciendo términos semejantes y escribiendo la forma canónica de la ecuación.

... Valores de los coeficientes

... Sustituyendo y operando en la cuadrática

$$x_1 = \frac{-2 + 30}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$x_1 = \frac{-2 - 30}{4} = -\frac{32}{4} = -8$$

$$x = 7$$

$$x + 1 = 7 + 1 = 8$$

$$7^2 + 8^2 = 113$$

$$49 + 64 = 113$$

$$113 = 113$$

Los números enteros positivos consecutivos son 7 y 8

... Resp.

IMPORTANTE: Si en este problema no se pidiera que los enteros fueran positivos, otra solución correspondería a los enteros -7 y -8 .

$$x = -8$$

$$x + 1 = -8 + 1 = -7$$

$$(-8)^2 + (-7)^2 = 113$$

$$64 + 49 = 113$$

$$113 = 113 \text{ Se cumple pero no es el caso del problema}$$

... Haciendo la Comprobación con los números negativos

2. Jaime es 2 años mayor que José y la suma de los cuadrados de ambas edades es 130 años. Hallar ambas edades.

Solución:

Sea:

$$x = \text{Edad de José.}$$

$$x + 2 = \text{Edad de Jaime}$$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 130$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 2 = 130$$

$$2x^2 + 4x - 126 = 0$$

$$a = 2; b = 4; c = -126$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-126)}}{2(2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16 + 1008}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{1024}}{4} = \frac{-4 \pm 32}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 32}{4} = 7$$

$$x_2 = \frac{-4 - 32}{4} = -9$$

... Formando la ecuación según las condiciones dadas.

... Efectuando operaciones indicadas y reduciendo términos semejantes.

... Forma canónica de la ecuación.

... Valores de los coeficientes

... Resolviendo la ecuación.

... 7 y -9 : *soluciones de la ecuación* en la que se rechaza $x_2 = -9$ porque no hay edad negativa y se acepta $x_1 = 7$.

Entonces: José tiene $x = 7$ años
Jaime tiene $(x + 2) = 7 + 2 = 9$ años

... Resp.

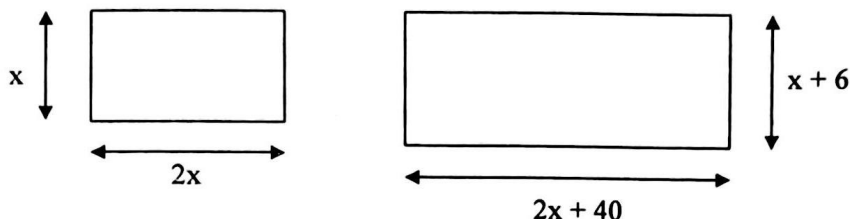
3. La longitud de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se hace doble. Hallar las dimensiones del terreno.

Solución:

Sea:

x = Ancho del Terreno

$2x$ = Largo del Terreno



$$x(2x) = 2x^2$$

$$(2x + 40); (x + 6)$$

$$(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 40x + 12x + 240$$

$$2x^2 + 52x + 240 = 2(2x^2)$$

$$-4x^2 + 2x^2 + 52x + 240 = 0$$

$$-2x^2 + 52x + 240 = 0$$

$$2x^2 - 52x - 240 = 0$$

$$a = 2; b = -52; c = -240$$

$$x = \frac{-(-52) \pm \sqrt{(-52)^2 - 4(2)(-240)}}{2(2)}$$

$$= \frac{52 \pm \sqrt{2704 + 1920}}{4}$$

$$= \frac{52 \pm \sqrt{4624}}{4} = \frac{52 \pm 68}{4}$$

$$x_1 = \frac{52 + 68}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

$$x_2 = \frac{52 - 68}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

... Área del terreno (largo $\times$ ancho). Área inicial.

... Aumentando en 40 m la longitud y en 6 m el ancho del terreno.

... Nueva área del terreno con sus dimensiones aumentadas.

... La nueva área es igual al doble del área inicial, según las condiciones del problema.

... Operando, transponiendo y escribiendo la ecuación resultante en su forma canónica.

... Coeficientes de la ecuación.

... Sustituyendo y operando en la fórmula cuadrática y resolviendo la ecuación.

Entonces: Ancho del Terreno: $= 30$ m

Largo del Terreno: $2(30) = 60$ m

... Soluciones de la ecuación. $x_1 = 30$ y $x_2 = -4$. Se rechaza -4 porque no existe longitudes negativas y se acepta 30.

... Resp.

Las técnicas algebraicas desarrolladas hasta este curso, se pueden usar para resolver problemas que incluyen ecuaciones cuadráticas. A continuación se le presenta una guía que le ayudará a plantear y resolver un problema, la cual constituye en sí, un **algoritmo para resolver un problema**:

1. **Inicio**
2. Leer el problema. Hacer una lista de los datos.
3. ¿Qué se debe encontrar? Introducir una variable y señalar lo que representa. Si es conveniente trazar una figura o usar una tabla.
4. Escribir una ecuación.
5. Resolver la ecuación.
6. ¿Parece razonable la solución?
 Si la respuesta es **No**, volver al paso 4.
 Si la respuesta es **Si**, continuar en el paso 7.
7. Comprobar la solución de la ecuación en el problema original.
8. ¿Ya se ha contestado la pregunta hecha en el problema?
 Si la respuesta es **No**, volver al paso 7
 Si la respuesta es **Si**, continuar en el paso 9.
9. Redactar la solución del problema.
10. **Final**

GUIA DE ESTUDIO No. 24

Plantear y resolver cada uno de los siguientes problemas:

1. Hallar dos enteros positivos consecutivos cuyo producto será 210.
2. Si el cuadrado de un número positivo disminuido en 7 veces el número, el resultado es 60. Hallar el número.
3. La longitud de un rectángulo tiene 3 cm más que su anchura. El área mide 70 cm^2 . Encontrar las dimensiones del rectángulo.
4. La longitud de una sala excede a su ancho en 4 m. Si cada dimensión se aumenta en 4 m, el área será el doble. Halle las dimensiones de la sala.
5. Si A tiene tres años más que B y el cuadrado de la edad de A aumentado en el cuadrado de la edad de B equivale a 317 años. Hallar ambas edades.
6. La suma de las edades de A y B es 23 años y su producto 102 años. Hallar ambas edades.
7. Si a 10 veces un número positivo le sumamos 12, se obtiene un resultado que es igual a 2 veces el cuadrado del número. Hallar el número.
8. Un caballo costó 4 veces lo que sus arreos y la suma del cuadrado del precio del caballo y el precio de los arreos es L. 860,625.00. ¿Cuánto costó el caballo y cuánto los arreos?

GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 4

Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones:

- | | |
|---|--|
| <p>1. $7(2x - 3) + 2(3x - 1) = 17$</p> <p>3. $8(x + 3) - 7(2x + 1) = 4(x - 2)$</p> <p>5. $6(x - 3) - 4(5 + 3x) = 7(x - 6)$</p> <p>7. $(4x - 7)(x - 5) + (3 - 2x)(1 + 2x) = -8$</p> <p>9. $x + 4x(x - 2) = (4x + 5)(x - 8)$</p> <p>11. $\frac{5(x - 2)}{4} - \frac{7(x - 3)}{6} = \frac{2}{3}$</p> <p>13. $\frac{2(x + 3)}{5} - \frac{2x - 1}{2} = \frac{3(2 - x)}{4}$</p> <p>15. $\frac{2 - 7x}{4} + \frac{5(3x - 4)}{9} = -2$</p> <p>17. $\frac{7(5 - 7x)}{22} + \frac{5(7 + x)}{11} = \frac{3(5 - 2x)}{4}$</p> | <p>2. $6 + 4(3x - 10) = 7(3x - 1)$</p> <p>4. $4(3 - 8x) + 7(2x - 9) = 6(1 - 2x)$</p> <p>6. $3(x - 1) - 2(2x - 3) = 5(x - 3)$</p> <p>8. $(3x - 1)(x - 2) - 3(x - 4)(x + 6) = 4$</p> <p>10. $6(2x + 1)(x - 7) - (3x - 2)(4x - 1) = 23$</p> <p>12. $\frac{10 - x}{3} - \frac{3(1 - 4x)}{8} = \frac{5(2x + 7)}{24}$</p> <p>14. $\frac{3(1 - x)}{2} + \frac{4x + 5}{3} = \frac{5(x - 1)}{6}$</p> <p>16. $\frac{2(9x + 4)}{11} - \frac{9(2x - 1)}{4} = 4$</p> <p>18. $\frac{3(2x - 3)}{11} + \frac{x - 1}{3} = x - 2$</p> |
|---|--|

Eliminar los signos de agrupación y determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones:

19. $15x + (-6x + 5) - 2(-x + 3) = -(7x + 23) - x + (3 - 2x)$
20. $3x + [-5x - (x + 3)] = 8x + (-5x + 9)$
21. $16x - [3x - (6 - 9x)] = 30x + [- (3x + 2) - (x + 3)]$
22. $x - [+5 + 3x - \{5x - (6 + x)\}] = -3$
23. $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$
24. $71 + [-5x + (-2x + 3)] = 25 - [- (3x + 4) - (4x + 3)]$
25. $- \{3x + 8 - [-15 + 6x - (-3x + 2) - (5x + 4)] - 29\} = -5$
26. $3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$
27. $(3x - 7)^2 - 5(2x + 1)(x - 2) = -x^2 - [(3x + 1)]$
28. $2x + 3(-x^2 - 1) = - \{3x^2 + 2(x - 1) - 3(x + 2)\}$

Resolver los siguientes problemas:

29. Se ha comprado un caballo y sus arreos por L. 600.00. Si el caballo costó 4 veces los arreos, ¿cuánto costó el caballo y cuánto los arreos?
30. La suma de tres números es 238. El primero excede al duplo del segundo en 8 y al tercero en 18. Hallar los números.
31. La diferencia de dos números es 36. Si el mayor se disminuye en 12, se tiene el cuádruplo del menor. Hallar los números.
32. La edad actual de A es el doble que la de B, y hace 10 años la edad de A era el triplo de la de B. Hallar las edades actuales.
33. La edad de A es el triple que la de B. Y dentro de 5 años será el doble. Hallar las edades actuales.
34. Un hacendado compró caballos y vacas por L. 40,000.00, por cada caballo pagó L. 600.00 y por cada vaca L. 800.00. Si compró 6 vacas menos que caballos. ¿Cuántas vacas y cuántos caballos compró?

Determinar el C.S. de las siguientes ecuaciones aplicando la Fórmula General:

35. $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

36. $x^2 - 7(x + 6) = x + 59$

37. $x(x + 3) = 5x + 3$

38. $3(3x - 2) = (x + 4)(4 - x)$

39. $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$

40. $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$

41. $7(x - 3) - 5(x^2 - 1) = x^2 - 5(x + 2)$

42. $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = 3(x - 5)$

43. $6x^2 - 12 - 4x = 19x - 32$

44. $2(x^2 - 3) - 3x = 2(x + 3)$

45. $2(x + 2)(x - 2) = (x - 2)(x + 3) - 2$

46. $2(x + 3)(x - 5) = 2(x - 1) + 8$

Del No. 47 al 56, despejar para la variable indicada a la derecha.

47. $3a - 3by = -9a + by$; y

48. $5aby - 3b = 7b - aby$; y

49. $C = \pi - \pi R$; π

50. $abx - 2abx = a^2b$; x

51. $F = \frac{kmM}{d^2}$; m

52. $\frac{C^2x + C^2x}{2C} = C^3 - Cx$; x

53. $S = \frac{a - r\ell}{1 - r}$; ℓ

54. $S = \frac{n}{2}(a + \ell)$; ℓ

55. $\ell = a + (n - 1)d$; d

56. $3a - x = 5(x + 7a)$; a

57. El perímetro de un rectángulo de lados a y b , está dado por la ecuación $P = 2a + 2b$. Resolver para b .

58. El promedio de dos números a y b es $A = \frac{a + b}{2}$. Resolver para b .

59. La superficie total de un cilindro circular recto de radio r y altura h , está dado por la ecuación $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Resolver para h .

60. El área de un trapecio de altura h y bases paralelas b_1 y b_2 , está dado por $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$. Resolver para h y b_1 .

Resolver los siguientes problemas:

61. El producto de dos enteros positivos consecutivos es 72. Hallar los números.

62. El producto de dos enteros positivos impares consecutivos es 99. Hallar los números.

63. El producto de dos números positivos es 108. Determinar los dos números si uno es 3 unidades mayor que el otro.
64. El producto de dos números positivos es 35. Determinar los dos números si uno es 3 unidades menor que dos veces el otro.
65. El área de un rectángulo es de 36 pies cuadrados. Determinar el largo y ancho, si el largo es 4 veces el ancho.
66. El área de un rectángulo es de 54 pulgadas cuadradas. Determinar el largo y ancho, si el largo es 3 pulgadas menor que dos veces el ancho.

 *

RESPUESTAS

- | | | | |
|---|---------------------------|---|----------------------------|
| 1. {2} | 3. {5/2} | 5. {4/13} | 7. {2} |
| 9. {-2} | 11. {-4} | 13. {-4/3} | 15. {10/3} |
| 17. {15/4} | 19. {-4} | 21. {5} | 23. {1/35} |
| 25. {-5} | 27. {29/15} | 29. Caballo: L. 470.00, Arreos: L. 120.00 | |
| 31. 44 y 8 | 33. A: 15; B: 5 | 35. {-1, -8} | 37. {3, -1} |
| 39. {-1, 5} | 41. {1} | 43. $\left\{\frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right\}$ | 45. {0, 1} |
| 47. $y = \frac{3a}{b}$ | 49. $\pi = \frac{C}{1-R}$ | 51. $m = \frac{Fd^2}{kM}$ | |
| 53. $\ell = \frac{Sr + a - S}{r}$ ó $\ell = \frac{S(r-1) + a}{r}$ | | 55. $d = \frac{\ell - a}{n-1}$ | 57. $b = \frac{P - 2a}{2}$ |
| 59. $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$ | 61. 8 y 9 | 63. 9 y 12 | |
| 65. largo = 12 pies; ancho = 3 pies | | | |

 *

UNIDAD 5. RELACIONES ALGEBRAICAS

5.1. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Asociar números con puntos de un plano.
- ♦ Identificar y graficar parejas de números reales en un plano geométrico.
- ♦ Calcular las coordenadas de un punto del plano, dada su gráfica.
- ♦ Trazar la gráfica de un problema, dada una relación del mismo.

La recta numérica real ha ayudado a tomar decisiones acerca de las relaciones entre los números, se ha asociado números con puntos de una recta. Se tratará ahora de asociar números con puntos en un plano.

Los conjuntos con que se trabaja, tienen como elementos parejas de números. Dos conjuntos A y B dados, se puede generar un conjunto de parejas ordenadas, y formar el *producto cartesiano* $A \times B$ de ellos como sigue:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

El producto cartesiano más importante a tratar en este curso será el de $R \times R = R^2$. Si (x, y) es un par ordenado entonces “x” se llama primera componente o abscisa y “y” se llama segunda componente u ordenada de la pareja.

DEFINICION: El conjunto de todas las parejas de números reales se llama *plano numérico real* o *plano cartesiano*. Cada pareja ordenada (x, y) se llama *punto* en el plano cartesiano y se representa por $P(x, y)$.

Como se puede identificar números con puntos de una recta, (*espacio unidimensional*), se puede también identificar parejas de números reales en un plano geométrico (*espacio bidimensional*).

Un *sistema de coordenadas cartesianas*, se forma con dos rectas reales, una horizontal y otra vertical, las cuales se cortan perpendicularmente tal como se muestra en la Fig. 10; luego se le asigna una única pareja a cada punto $P(x, y)$, llamadas *coordenadas de P*.

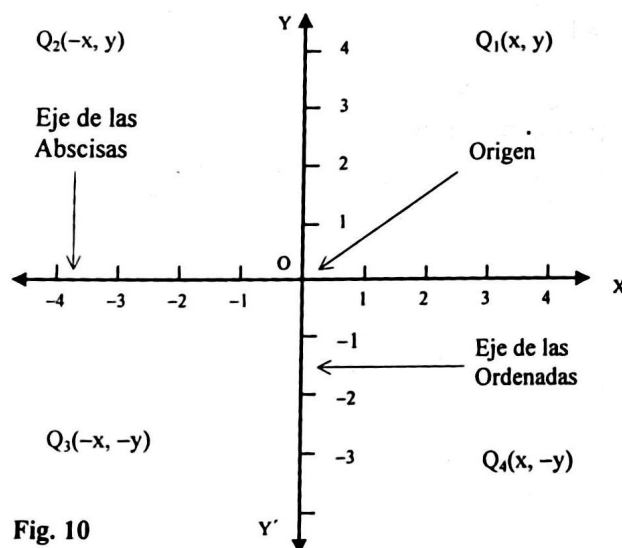


Fig. 10

$\vec{XX'}$ = Eje de las Abscisas
 $\vec{YY'}$ = Eje de las Ordenadas
 O = Origen Intersección entre ambos ejes
 Los ejes dividen el plano en 4 partes llamadas *cuadrantes* que se enumeran con Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.
 Se selecciona una unidad de longitud para ambos ejes.
 $\vec{OX'}$ = Abscisas Negativas
 $\vec{OX}$ = Abscisas Positivas
 $\vec{OY'}$ = Ordenadas Negativas
 $\vec{OY}$ = Ordenadas Positivas

En un plano cartesiano un punto P , cuyas coordenadas ambas son positivas, pertenece al cuadrante 1. Si la abscisa x es negativa y la ordenada y es positiva, pertenece al cuadrante 2. Si ambas son negativas, pertenece al cuadrante 3. Si la abscisa x es positiva y la ordenada y es negativa, pertenece al cuadrante 4. Véase la Figura 10 de la página anterior.

Ejemplos: ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes puntos?

- | | | | | |
|----------------|---|---|-----------|----------|
| a) $A(12, 17)$ | ? | a Q_1 | ... Resp. | |
| b) $B(-8, -4)$ | ? | a Q_3 | ... Resp. | |
| c) $C(0, 0)$ | ? | A ningún cuadrante, son las coordenadas del origen. | | ... Resp |
| d) $D(-10, 3)$ | ? | a Q_2 | ... Resp. | |
| e) $E(17, -4)$ | ? | a Q_4 | ... Resp. | |

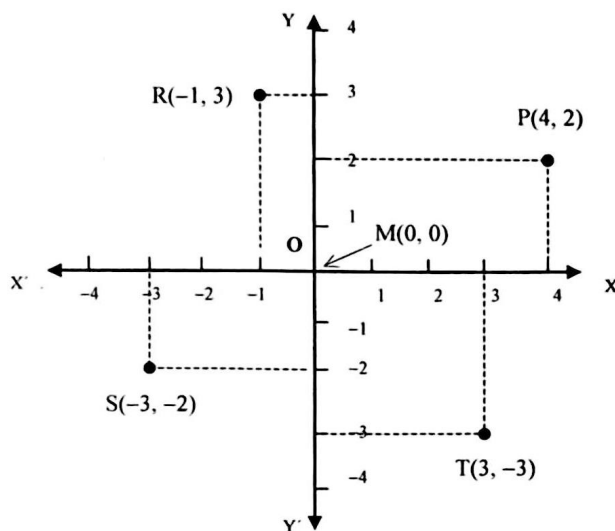


Fig. 11

Se procede ahora a graficar un punto en el plano cartesiano dadas sus coordenadas. Si $P(4, 2)$ se sabe que está en Q_1 porque sus coordenadas ambas son positivas. Trácese en eje XX' y por $x = 4$, una recta punteada perpendicular al mismo eje. Por $y = 2$ y en el eje YY' trácese otra recta punteada perpendicular al mismo eje, la que intersectará a la primera en un punto. Ese punto corresponde a la gráfica de punto $P(4, 2)$ en el plano. Si $R(-1, 3)$ entonces R está en el cuadrante 2; procédase de la misma forma que para $P(4, 2)$ solo que ahora $x = -1$ y $y = 3$. Véase la Fig. 11. Si $S(-3, -2)$ entonces S está en el cuadrante 3; aquí $x = -3$, $y = -2$. Procédase como en los puntos anteriores. Si $T(3, -3)$ entonces T está en el cuadrante 4. Aquí $x = 3$, $y = -3$.

Si ahora se invierte el proceso; es decir se da un punto del plano y se desea encontrar sus coordenadas, el procedimiento es sencillo, ya que solo se trazan del punto dado, rectas punteadas perpendiculares a ambos ejes, luego se lee con aproximación los valores de la abscisa x y de la ordenada y . Véase Fig. 12

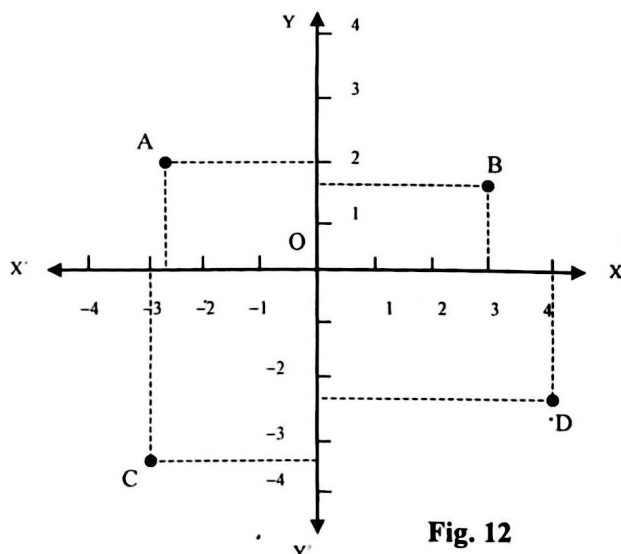


Fig. 12

Aproximadamente las coordenadas de los puntos en la Fig. 12 de:

- A son $A(-2.7, 2)$
- B son $B(3, 1.7)$
- C son $C(-3, -3.4)$
- D son $D(4, -2.3)$

5.2. NOCION DE RELACION

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Establecer procedimientos para formular una regla de correspondencia entre dos variables y trazar su gráfica en un plano coordenado.
- ♦ Comprender el establecimiento de una relación o correspondencia entre dos variables.
- ♦ Resolver problemas con aplicación de la noción de relación.

DEFINICION: Una **relación**, es cualquier conjunto de pares ordenados de un producto cartesiano

Una relación puede indicarse mediante:

- a) Un conjunto de pares ordenados.
- b) Una regla de correspondencia, una fórmula o ecuación algebraica.
- c) Una tabla de valores.
- d) Una gráfica en el plano cartesiano.

La relación siguiente se presente en las formas mencionadas anteriormente:

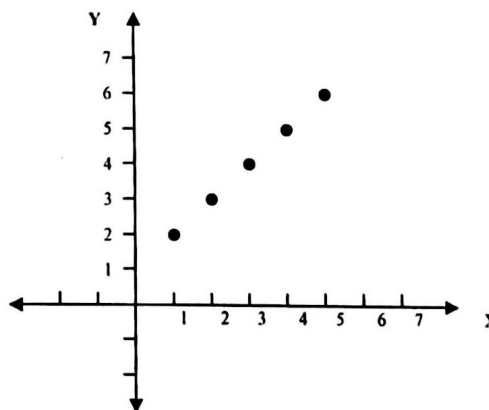
Un conjunto de parejas ordenadas : $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

Una tabla de valores :

x	1	2	3	4	5
y	2	3	4	5	6

Una regla de correspondencia, : $y = x + 1$
fórmula o ecuación algebraica

Una gráfica en el plano cartesiano :



Es importante hacer notar que para establecer una relación es necesario tener un **enunciado verbal** que relacione los elementos de dos conjuntos, de manera que a un elemento de uno de ellos, le corresponda un elemento del otro conjunto. El enunciado verbal de la relación también debe permitir establecer una relación entre dos **variables**, de tal manera que a cada valor asignado a una de ellas (variable independiente: x) le corresponda un valor a la otra (variable dependiente: y). Lo anterior permite afirmar que en toda relación habrá una variable llamada **variable dependiente** (y) cuyo valor depende del valor asignado a la otra variable llamada **variable independiente** (x). Con el enunciado verbal de la relación y con la identificación de los tipos de variables que intervienen en ella, ya se puede escribir dicha relación, como una regla de correspondencia, fórmula o ecuación algebraica, como una tabla de valores, como un conjunto de parejas o como una gráfica en el plano cartesiano, tal como se expresó al inicio del tema.

Ejemplo 1. Un banano cuesta L. 0.10. ¿Cuál será el costo si se compran 0, 1, 2, 3, 4... bananos? a) Seleccionar las variables que intervienen en la relación; b) Identificar los tipos de variables; c) Escribir una regla de correspondencia, fórmula o ecuación algebraica de la relación; d) Hacer una tabla de valores; e) Hacer la gráfica de la relación, en el plano cartesiano.

Solución:

a) Sean n = número de bananos a comprar.
 C = costo de la compra de bananos.

... Seleccionando las variables que intervendrán en la relación.

b) n = variable independiente.
 C = variable dependiente.

... El costo C depende del número n de bananos a comprar.

c) $0.10n$
 $C = 0.10n$

... Costo de la compra de n bananos.
... Ecuación algebraica de la relación.
... Tabla de valores de relación.

d)

n	0	1	2	3	4	...
C	0	0.10	0.20	0.30	0.40	...

Si $n = 0$ entonces $C = 0.10(0) = 0.00$

$n = 1$ entonces $C = 0.10(1) = 0.10$

$n = 2$ entonces $C = 0.10(2) = 0.20$

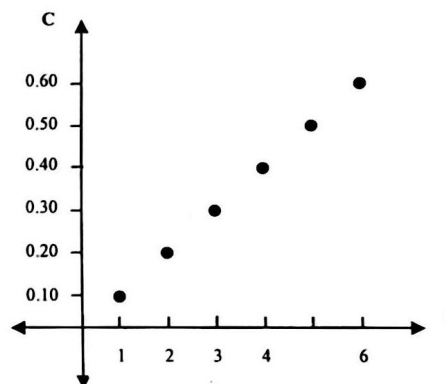
$n = 3$ entonces $C = 0.10(3) = 0.30$

$n = 4$ entonces $C = 0.10(4) = 0.40$

⋮

⋮

⋮



e) La grafica de la relación está a la derecha

Ejemplo 2. Un operario tiene un sueldo base de L. 25.00 al día. La empresa le paga L. 4.25 la hora extra. Calcular el sueldo diario cuando trabaja 0, 1, 2, 3, 4 horas extras. a) Seleccionar las variables que intervienen en la relación; b) Identificar el tipo de variables; c) Escribir la fórmula algebraica; d) Hacer una tabla de valores; e) Hacer la gráfica respectiva.

Solución:

a) Sean n = número de horas extras trabajadas.
 S = sueldo total diario

... ¿Qué se hizo?

... Resp.

b) n = variable independiente.
 C = variable dependiente.

... ¿Porqué?

... Resp.

c) $25 + 4.25n$
 $S = 25 + 4.25n$

... ¿Qué representa ésta expresión?

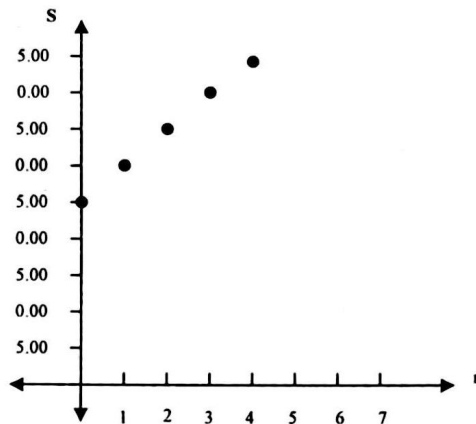
- d) Si $n = 0$ entonces $S = 25 + 4.25(0) = 25.00$
 $n = 1$ entonces $S = 25 + 4.25(1) = 29.25$
 $n = 2$ entonces $S = 25 + 4.25(2) = 33.50$
 $n = 3$ entonces $S = 25 + 4.25(3) = 37.75$
 $n = 4$ entonces $S = 25 + 4.25(4) = 42.00$
 $\vdots$

n	0	1	2	3	4
S	25.00	29.25	33.50	37.75	42.00

... Calculando los valores de la tabla, con la fórmula de la relación encontrada en c).

... El sueldo diario S depende del número de horas extras n trabajadas.

- e) La gráfica de la relación es la siguiente:



GUIA DE ESTUDIO No. 25

En los siguientes problemas: a) seleccionar las variables que intervienen en la relación; b) identificar el tipo de las variables usadas; c) escribir la regla de correspondencia, fórmula o ecuación algebraica de la relación; d) la tabla de valores y e) La gráfica de la relación.

1. El galón de un carburante cuesta L. 6.00. Si se compran 0, 1, 2, 3, 4, 5 galones. ¿Cuánto se paga por 10 galones?
2. Una empresa paga L. 40.00 diarios como sueldo base y L. 10.25 por hora extra. Se trabajan 0, 1, 2, 3, 4, 5 horas extras. ¿Cuánto gana un empleado que trabaja 8 horas extras?
3. Un ciclista viaja con una velocidad de 10 km/h. Si camina 1, 2, 3, 4, 5 horas continuas. ¿Cuánto recorrerá en 8 horas?
4. Un dólar americano equivale a L. 16.95. Se tienen 1, 2, 3, 4, 5, 6 dólares. ¿Cuántos lempiras se tendrán con US\$ 20?
5. El estacionamiento de automóviles cobra L. 1.75 hora o fracción. Si estaciona 1, 2, 3, 4, 5 horas, ¿Cuánto pagará por 10 horas?
6. Se tiene una producción inicial de 20 botes envasados. Un empleado envasa 4 por hora. Si trabaja 1, 2, 3, 4, horas. ¿Cuánto envasará al cabo de 8 horas?

 *

5.3. FORMULAS DE LA DISTANCIA Y DEL PUNTO MEDIO. EL CIRCULO

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano.
- ♦ Calcular las coordenadas del punto medio de un segmento de recta determinados por dos puntos del plano cartesiano.
- ♦ Escribir la forma canónica de la ecuación de un círculo dadas las coordenadas del centro y el radio.
- ♦ Determinar la ecuación de un círculo en su forma general.
- ♦ Determinar las coordenadas del centro de un círculo y el radio del mismo, dada la ecuación en su forma canónica.
- ♦ Escribir la ecuación de un círculo en su forma canónica y general, dados los extremos de su diámetro.

FORMULAS DE LA DISTANCIA Y DEL PUNTO MEDIO

Aunque tendemos a considerar el sistema de coordenadas cartesianas como algo dado (recuerde que sólo tiene cerca de 350 años de antigüedad), es importante reconocer que se trata de una idea revolucionaria. El hecho de contar con un sistema de coordenadas nos permite enfrentar problemas geométricos desde un punto de vista algebraico. Las ideas que vamos a analizar son parte de una rama de la matemática llamada *geometría analítica*.

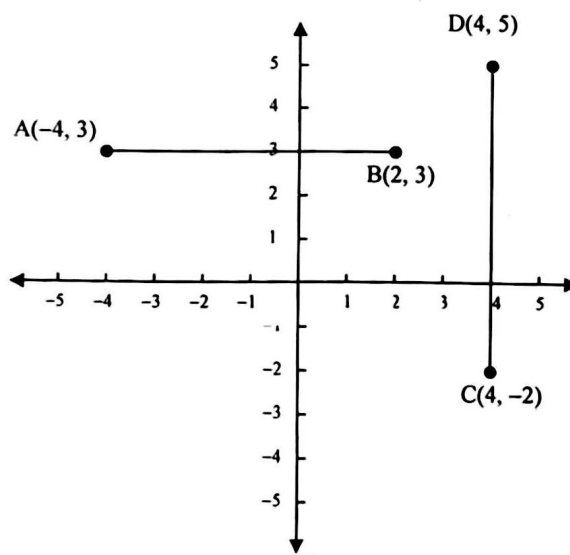
Por ejemplo, la distancia entre dos puntos y el punto medio de un segmento de recta son ambas ideas inherentemente geométricas; sin embargo, con la ayuda de un sistema de coordenadas, podemos obtener una fórmula algebraica para cada una de ellas.

Ejemplo 1. Determinar la distancia entre las siguientes parejas de puntos:

- a) $A(-4, 3)$ y $B(2, 3)$ b) $C(4, -2)$ y $D(4, 5)$

Solución:

Trazamos las parejas dadas de puntos en un plano cartesiano

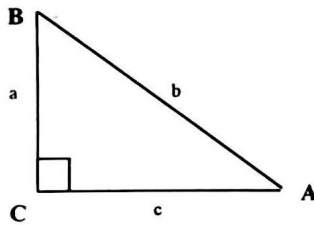


- a) Puesto que los puntos $A(-4, 3)$ y $B(2, 3)$ están en la misma recta horizontal, la distancia entre ellos es la misma distancia que entre los puntos -4 y 2 en el eje X . La distancia entre los puntos a y b sobre una recta numérica es $|a - b|$. Por lo tanto, la distancia entre $A(-4, 3)$ y $B(2, 3)$ es $|2 - (-4)| = 6$.
- b) De manera análoga, los puntos $C(4, -2)$ y $D(4, 5)$ están en una recta vertical, de modo que la distancia entre ellos es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas Y (ordenadas). Por lo tanto, la distancia entre $(4, -2)$ y $(4, 5)$ es $|5 - (-2)| = 7$.

En el ejemplo anterior, podríamos haber determinado simplemente las distancias contando las unidades horizontales o verticales. Hemos elegido un método más formal de modo que podamos reconocer que la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_1)$ que están en la misma recta horizontal, es $|x_2 - x_1|$, y que la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_1, y_2)$ que están en la misma recta vertical, es $|y_2 - y_1|$.

Para obtener una fórmula para la distancia entre dos puntos cualesquiera, también necesitaremos el teorema de Pitágoras.

EL TEOREMA DE PITAGORAS Y SU RECÍPROCO



En el triángulo rectángulo ABC con los nombres que se indican en la figura, $a^2 + b^2 = c^2$.

El recíproco de esto también es cierto. Es decir, si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, con c como hipotenusa.

Supongamos ahora que queremos determinar la distancia d entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Podemos bajar perpendiculares hacia los ejes, como se indica en la figura 12.1, formando un triángulo rectángulo cuyo tercer vértice es $Q(x_2, y_1)$.

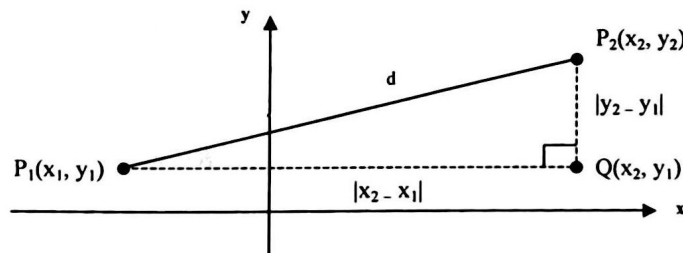


Fig. 12.1

Puesto que los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_1)$ están en la misma recta horizontal, la longitud del lado izquierdo del triángulo es $|x_2 - x_1|$. De manera análoga, la longitud del lado vertical del triángulo es $|y_2 - y_1|$. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d(P_1, P_2)^2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$d(P_1, P_2)^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

... Puesto que la distancia d debe ser positiva

... $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ y análogamente para las y , $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$.

... Así, hemos obtenido la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

LA FORMULA DE LA DISTANCIA

La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano es:

$$d(P_1, P_2)^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2. Determinar la distancia entre los puntos $P_1(3, -1)$ y $P_2(-1, 4)$.

Solución:

Aunque este ejemplo se puede resolver sin un diagrama, le recomendamos ampliamente que siempre que sea posible se trace un diagrama para acompañar a su solución. Trazamos los puntos en la Figura 12.2. De manera arbitraria, hacemos $(x_1, y_1) = (3, -1)$ y $(x_2, y_2) = (-1, 4)$. Aplicamos la fórmula de la distancia para obtener.

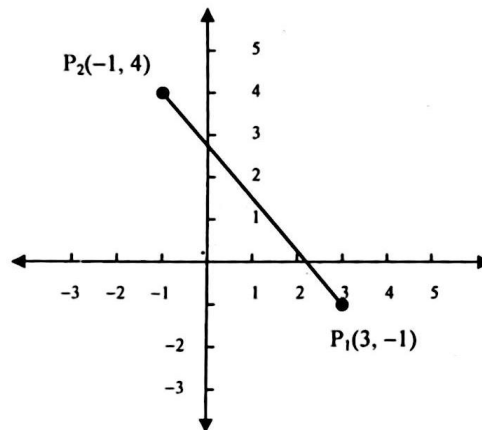


Fig. 12.2

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

... Fórmula de la distancia. Sustituyendo y operando.

$$= \sqrt{(-1 - 3)^2 + [4 - (-1)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{41} \approx 6.4$$

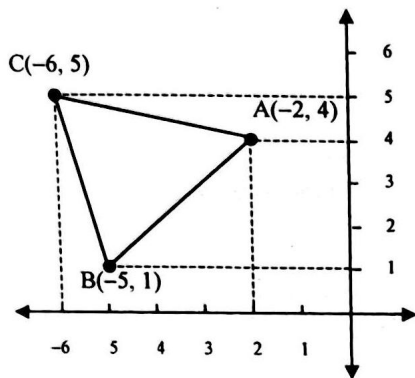
... Resp.

Es importante observar que la fórmula de la distancia también se aplica a dos puntos que están en una recta horizontal o vertical. Si aplicamos la fórmula de la distancia a los puntos $P_1(4, -2)$ y $P_2(4, 5)$, obtenemos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(4 - 4)^2 + [5 - (-2)]^2} = \sqrt{0^2 + 7^2} = \sqrt{7^2} = 7 \quad \text{... Resp.}$$

lo que coincide con los resultados del ejemplo 1.

Ejemplo 3. Comprobar que el triángulo con vértices en $A(-2, 4)$, $B(-5, 1)$ y $C(-6, 5)$ es isósceles.

Solución:

... Dibujando el triángulo en un sistema de coordenadas cartesianas, con los puntos dados.

$$\begin{aligned} d(B, C) &= \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

... Aplicando la fórmula de la distancia para calcular la longitud de cada lado del triángulo.

$$\begin{aligned} d(B, A) &= \sqrt{(-2 + 5)^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

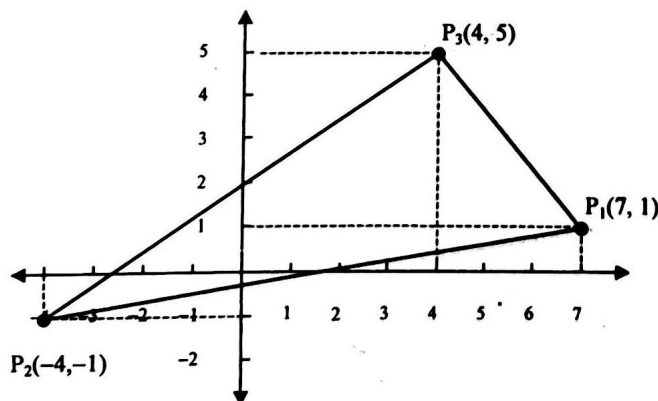
$$d(B, C) = d(A, C) = \sqrt{17}$$

... Como el triángulo tiene dos lados cuyas longitudes son iguales, se concluye que el triángulo es isósceles.

... Resp.

El $\triangle ABC$ es Isósceles

Ejemplo 4. Determinar si los puntos $P_1(7, 1)$, $P_2(-4, -1)$ y $P_3(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo

Solución:

... ¿Qué se hizo?

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2} \quad \dots \text{ ¿Qué se hizo?} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} \end{aligned}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{[4 - (-4)]^2 + [5 + (-1)]^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$d(P_3, P_1) = \sqrt{[7 - 4]^2 + [1 - 5]^2} = \sqrt{3^2 + 16^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(P_3, P_1)^2 + d(P_2, P_3)^2 = 5^2 + (\sqrt{100})^2$$

$$= 25 + 100 = 125$$

$$= d(P_1, P_2)^2 = (\sqrt{125})^2$$

$$= 125$$

... Comprobando el teorema de Pitágoras con las distancias encontradas.

... En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados, es igual al cuadrado de la longitud del lado restante.

P_1 , P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo con un ángulo recto en P_3 . (Véase figura del inicio). ... Resp.

A veces necesitamos determinar el punto medio de un segmento de recta. En la figura 12.3 hemos trazado un segmento de recta que une los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

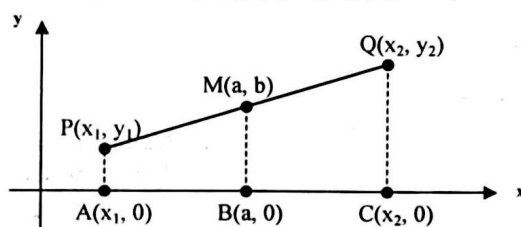


Fig. 12.3

Sea $M(a, b)$ el punto medio del segmento de recta $\overline{PQ}$. Hemos trazado líneas punteadas por P , $M(a, b)$ y Q paralelas al eje Y , obteniendo los puntos $A(x_1, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(x_2, 0)$ sobre el eje X .

Es un hecho básico de la geometría que si rectas paralelas intersecan segmentos iguales en una recta, entonces intersecan segmentos de recta iguales en cualquier recta. En otras palabras, si $\overline{PM} = \overline{MQ}$, entonces se tiene $\overline{AB} = \overline{BC}$, lo que significa que B es el punto medio de $\overline{AC}$. Pero como $\overline{AC}$ está sobre el eje X , su punto medio es justamente el promedio de las coordenadas x . Por lo tanto, $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$. De

manera análoga, $b = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Así, hemos demostrado lo siguiente:

LA FORMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio M del segmento de recta que une los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo. Determinar el punto medio del segmento de recta que une los puntos A(-3, 5) y B(2, 1).

Solución:

$$M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$$

$$M\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

... Utilizamos la fórmula del punto medio para determinar dicho punto.

... Resp.

EL CÍRCULO

Un **círculo** se define como el conjunto de todos los puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo es constante. El punto fijo se llama el centro, C , y la distancia constante al centro del círculo se llama el radio, r (donde $r > 0$).

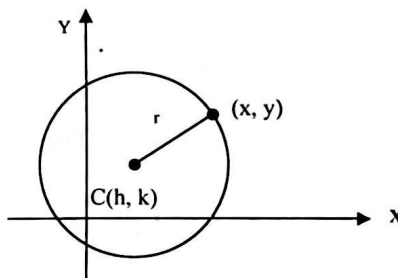


Fig. 12.4

Coloquemos el círculo de radio r en el plano cartesiano, con el centro en el punto (h, k) . Elijamos un punto en el plano, y llamémosle (x, y) . Véase la figura 12.4. La definición de un círculo nos dice que para que (x, y) esté en el círculo la distancia del centro (h, k) a (x, y) debe ser r . Por la fórmula de la distancia, tenemos:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Por conveniencia, eliminamos el radical elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación para obtener lo siguiente:

LA FORMA CANÓNICA DE LA ECUACION DE UN CÍRCULO

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Es la ecuación de un círculo con centro $C(h, k)$ y radio r .

Esta es la **forma canónica de la ecuación de un círculo**, (también conocida como forma estándar). El centro y el radio son todo lo que se necesita para describir o graficar un círculo.

Ejemplo 1. Determinar la ecuación de un círculo con: a) Centro $(2, 5)$ y radio 6; b) Centro $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y radio $\sqrt{2}$; tanto en su forma canónica como en su forma general.

Solución:

a) $C(2, 5), r = 6.$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$$

... Datos del problema, donde $h = 2$ y $k = 5$.

... Sustituimos $h = 2$, $k = 5$ y $r = 6$ en la ecuación del círculo en su forma canónica

... Sustituyendo valores en la ecuación y operando.

... Forma canónica ... Resp.

... Forma general obtenida de desarrollar los cuadrados de ambos binomios ... Resp.

b) $C\left(\frac{1}{2}, -3\right), r = \sqrt{2}$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + [y - (-3)]^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = 2$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 6y + 9 = 2$$

$$x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{29}{4} = 0$$

... Datos del problema donde $h = \frac{1}{2}$, $k = -3$,

$$r = \sqrt{2}$$

... Sustituyendo valores en la ecuación y operando.

... Forma canónica ... Resp.

... Desarrollando los cuadrados de ambos binomios y operando.

... Forma general ... Resp.

IMPORTANTE:

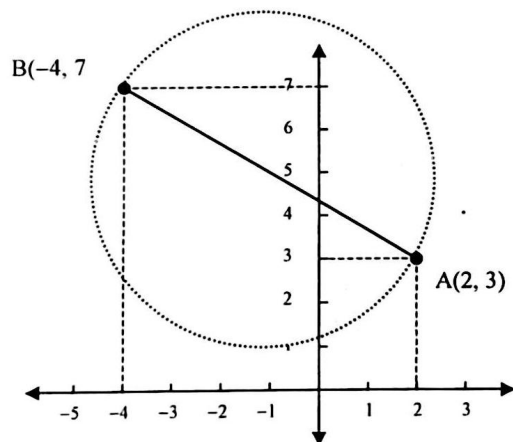


1. El radio del círculo siempre deberá ser un número positivo.
2. Aunque las dos formas de escribir la ecuación de un círculo son aceptables, la forma canónica de la ecuación tiene la ventaja significativa de facilitar el reconocimiento del centro y del radio.
3. Para calcular las coordenadas del centro de un círculo, dada la ecuación en la forma canónica, basta con cambiar el signo al término constante de ambos binomios cuadráticos y para el radio, se le extrae la raíz cuadrada al término constante de la ecuación, así:

$$\text{Si } (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \text{ entonces } h = 2, k = -3, r = \sqrt{25} = 5$$

Ejemplo 2. Determinar la ecuación del círculo con diámetro en los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 7)$ extremos del diámetro.

Solución:



... Trazando un esbozo de la gráfica para visualizar los datos y lo que debe de calcularse.

Fig. 12.5

Sea $C(h, k)$ el centro del círculo.

... El centro está en el punto medio del segmento AB que es el diámetro.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2 - 4}{2}, \frac{10}{2}\right) \Rightarrow M(-1, 5)$$

... Calculando las coordenadas del centro con la fórmula del punto medio.

$$M(-1, 5) = C(h, k)$$

... Las coordenadas del centro son $C(-1, 5)$

$$r = d(C, A) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (5 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$$

... El radio r es la distancia del centro a uno cualquiera de los extremos del diámetro. Se seleccionó a $A(2, 3)$ en este caso.

$$r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

... Ecuación del círculo en su forma canónica donde $h = -1$, $k = 5$, $r = \sqrt{13}$

$$[x - (-1)]^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{13})^2$$

... Sustituyendo valores y operando.

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 13$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 13 = 0$$

... Forma canónica.

... Resp.

... Forma general.

... Resp.

*

GUIA DE ESTUDIO No. 26

Determinar la distancia y las coordenadas del punto medio del segmento de recta que los puntos dados.

- | | | |
|--------------------------------------|--|---------------------------------------|
| 1. $A(-3, 4)$ y $B(1, -1)$ | 2. $P(2, 3)$ y $Q(3, 6)$ | 3. $R(1, 5)$ y $S(-1, -4)$ |
| 4. $E(0, 0)$ y $F(2, 4)$ | 5. $C(0, 0)$ y $D(a, a)$ | 6. $T(0, 0)$ y $U(a, 2a)$ |
| 7. $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$ | 8. $P(-5, 5)$ y $Q(-5, 1)$ | 9. $R(-4, 3)$ y $S(5, 3)$ |
| 10. $M(-1, -1)$ y $H(-5, 1)$ | 11. $C(1, 4)$ y $D(-3, 1)$ | 12. $P(5, 3)$ y $T(-5, -3)$ |
| 13. $R(0, 6)$ y $T(5, -1)$ | 14. $E(4.2, -3.6)$ y $F(-2.6, 2.3)$ | 15. $T(-1.6, 3.5)$ y $W(-4.3, -1.7)$ |
| 16. $A(3, -1)$ y $B(\frac{1}{2}, 4)$ | 17. $C(\frac{3}{4}, 2)$ y $E(-\frac{1}{2}, 6)$ | 18. $H(4, 0)$ y $R(-\frac{3}{5}, -4)$ |

El perímetro P de un triángulo es la suma de las longitudes de sus tres lados. Calcular el perímetro de un triángulo determinado por los 3 puntos. Utilizar una calculadora con tecla de raíz cuadrada y redondee la respuesta a centésimas.

- | | | |
|--|--|--|
| 19. $A(7, 7)$, $B(7, 1)$, $C(-1, 1)$ | 20. $A(4, 3)$, $B(-2, 3)$, $C(5, 0)$ | 21. $A(0, -4)$, $B(2, 3)$, $C(4, 6)$ |
| 22. $A(-2, -1)$, $B(6, -8)$, $C(3, 5)$ | 23. $A(2, 5)$, $B(2, 10)$, $C(5, 5)$ | 24. $A(0, 5)$, $B(5, 0)$, $C(0, 0)$ |

Escribir la ecuación del círculo en su forma canónica y general con centro C y radio r dados.

- | | | |
|--|--------------------------|-----------------------------------|
| 25. $C(2, 3)$, $r = 3$ | 26. $C(7, -4)$, $r = 5$ | 27. $C(\frac{1}{2}, 4)$, $r = 6$ |
| 28. $C(-\frac{3}{4}, -2)$, $r = \sqrt{7}$ | 29. $C(3, -1)$, $r = 4$ | 30. $C(-3, 2)$, $r = 3$ |

Identificar las coordenadas del centro C y el radio r del círculo dado:

31. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

32. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = 34$

33. $x^2 + (y - 3)^2 = 4$

34. $x^2 + y^2 = 9$

35. $x^2 + (y + 2)^2 = 10$

36. $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

37. $(x + 5)^2 + y^2 = 25$

38. $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = 9$

39. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 30$

Determinar la ecuación del círculo en sus dos formas, con diámetro cuyos extremos son:

40. A(-3, 5) y B(-4, 0)

41. A(-2, 8) y B(4, -5)

42. A(6, 0) y B(0, 6)

43. A(-2, 3) y B(4, 5)

44. A(5, 6) y B(-5, -6)

45. A(4, -3) y B(-2, 7)

46. La mediana de un triángulo es un segmento de recta que va desde el vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Determinar la longitud de las medianas del triángulo con vértices en A(-3, 5), B(3, -3) y C(-1, -4).

47. Hallar la longitud de las medianas del triángulo con vértices en A(2, 3), B(3, -3) y C(-1, -1).

48. Hallar la longitud de las medianas del triángulo con vértices en A(3, 5), B(0, 0) y C(-5, 2).

49. Probar que los puntos A(-7, 2), B(3, -4) y C(1, 4) son los vértices de un triángulo isósceles.

50. Mostrando que los tres lados tienen la misma longitud, comprobar que los puntos A(-5, 0), B(3, 0) y C(-1, $4\sqrt{3}$) son los vértices de un triángulo equilátero.

5.4. RELACIÓN LINEAL. LA LINEA RECTA. INTERSECTOS Y GRAFICA. PENDIENTE

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Identificar una relación lineal.
- ♦ Graficar una línea recta con los intersectos en ambos ejes del sistema cartesiano y un punto cualquiera de comprobación.
- ♦ Interpretar el concepto de pendiente – elevación – avance de una línea recta y los tipos de pendiente.
- ♦ Calcular la pendiente de una recta dados dos puntos por los cuales pasa.

La igualdad $y = f(x) = x + 2$ o simplemente $y = x + 2$ es una ecuación con dos variables. Hay un número infinito de pares ordenados que satisfacen la ecuación y todos se localizan sobre la misma recta. La gráfica de $y = x + 2$ es una línea recta y a la ecuación se le da el nombre de **ecuación lineal**. Como dos puntos determinan una recta, un método conveniente para dibujar la gráfica de una recta, consiste en localizar los dos **intersectos** o **coordenadas al origen**. La abscisa al origen o sea el Intersecto en el Eje XX' (Ix) es el punto donde la recta corta al eje XX'; este punto tiene coordenadas Ix(a, 0) donde $a \in \mathbb{R}$ y la segunda componente siempre es cero. La ordenada al origen o sea el Intersecto en el Eje YY' (Iy) es el punto donde la recta corta al eje YY'; este punto tiene coordenadas Iy(0, b) donde $b \in \mathbb{R}$ y la primera componente es siempre cero (0).

IMPORTANTE:



1. Cuando la recta corta al eje XX' o sea Ix(a, 0), el valor de y es 0, es decir, $y = 0$.
2. Cuando la recta corta al eje YY' o sea Iy(0, b), el valor de x es cero, es decir, $x = 0$.
3. Generalmente conviene localizar otro punto además de Ix e Iy para comprobar los dos primeros.

Ejemplo 1. Dibujar la gráfica de $y = 2x - 4$ usando las coordenadas al origen o intersecciones con los ejes

Solución:

- a) Para encontrar la abscisa en el origen $I_x(a, 0)$, se hace $y = 0$, y se despeja para x .

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$x = 2$ entonces la abscisa en el origen es $I_x(2, 0)$

- b) Para encontrar la ordenada en el origen $I_y(0, b)$, se hace $x = 0$ y se despeja para y .

$$y = 2(0) - 4$$

$$y = 0 - 4$$

$y = -4$ entonces la ordenada en el origen es $I_y(0, -4)$

- c) Conviene localizar otro punto para comprobación. Por ejemplo $x = 3$.

$$y = 2(3) - 4$$

$$y = 6 - 4$$

$y = 2$ entonces se tiene el punto $P(3, 2)$.

- d) Los tres puntos I_x , I_y y P están alineados y por consiguiente la gráfica está bien trazada. Véase la figura siguiente.

IMPORTANTE:



Otro método para graficar es el de formar una tabla de valores. Se le asignan valores a la variable independiente (x) y se calculan los respectivos valores de la variable dependiente (y). Ambos valores se consignan en una tabla.

Si $x = -1$ entonces $y = 2(-1) - 4 = -6$

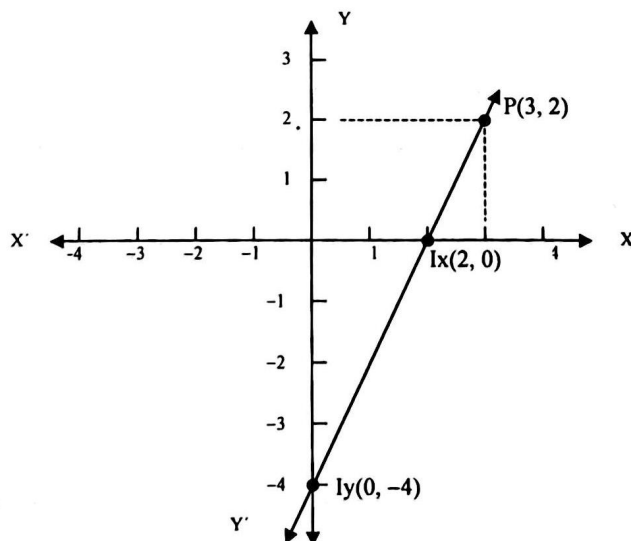
$x = 0$ entonces $y = 2(0) - 4 = -4$

$x = 1$ entonces $y = 2(1) - 4 = -2$

$x = 2$ entonces $y = 2(2) - 4 = 0$

$x = 3$ entonces $y = 2(3) - 4 = 2$

x	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-4	-2	0	2	4



Ejemplo 2. Dibujar la gráfica de $y = -x + 3$ usando las coordenadas al origen, $I_x(a, 0)$, $I_y(0, b)$ y un punto cualesquiera $P(x, y)$.

Solución:

$$y = 0 + 3 \text{ entonces } y = 3; \text{ luego } I_x(0, 3)$$

$$0 = -x + 3 \text{ entonces } x = 3; \text{ luego } I_y(3, 0)$$

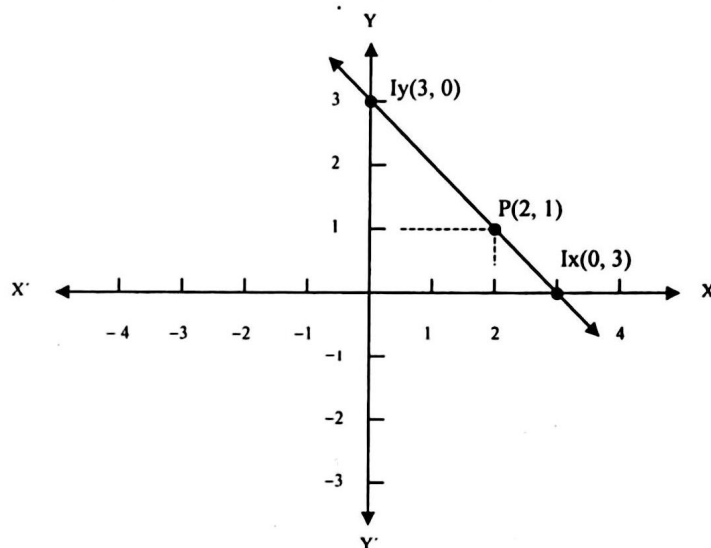
$$\text{Si } x = 2 \text{ entonces } y = -2 + 3; \text{ luego } P(2, 1)$$

... Haciendo $x = 0$ en la ecuación.

... Haciendo $y = 0$ en la ecuación.

... Calculando las coordenadas de un punto cualesquiera P . (Puede darse cualquier valor para x).

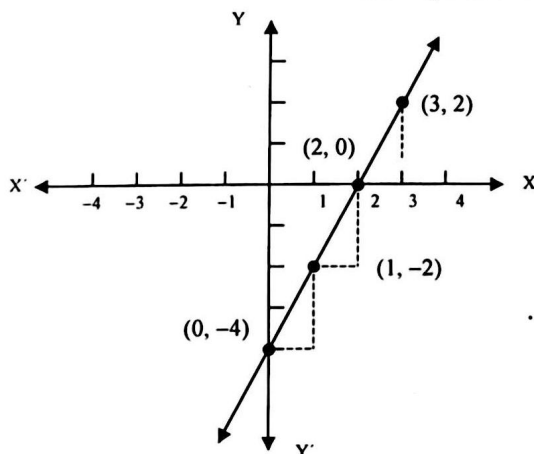
Los tres puntos I_x , I_y y P están alineados y por consiguiente la gráfica está bien trazada.



La siguiente figura muestra la gráfica de la ecuación lineal $y = 2x - 4$ incluyendo la coordenada de cuatro puntos específicos. En la gráfica se observa que el valor de y aumenta 2 unidades cada vez que el valor de x se incrementa en una unidad. La razón que se forma al comparar este cambio de y con el correspondiente cambio de x , es 2. Por conveniencia se puede referir con:

“ Δy ” (Léase “delta y ”) al cambio de valor de y .

“ Δx ” (Léase “delta x ”) al cambio de valor de x .



Usando las coordenadas de los puntos $(3, 2)$ y $(2, 0)$, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\text{Cambio de valores de } y}{\text{Cambio de valores de } x} = \frac{2 - 0}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

A esta razón se le da el nombre de **pendiente de la recta** y se define de la siguiente forma:

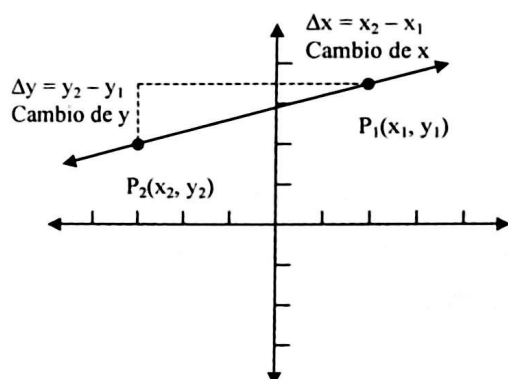
DEFINICION: Si dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ están en la misma recta $\overleftrightarrow{L}$, la pendiente m de la recta, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{donde } x_2 \neq x_1$$

La pendiente de una recta también puede expresarse en forma más descriptiva, como:

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$$

donde **elevación** es el cambio o distancia vertical, y **avance** corresponde al cambio o distancia horizontal.



En la figura de la izquierda las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 se han definido como (x_1, y_1) y como (x_2, y_2) respectivamente. El cambio de P_1 a P_2 en la dirección paralela al eje YY' corresponde a $\Delta y = y_2 - y_1$, y el cambio en la dirección paralela al eje XX' corresponde a $\Delta x = x_2 - x_1$; entonces, la pendiente m viene dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_2 \neq x_1$$

Talvez resulte más útil concebir la pendiente de una recta, en cualquiera de las siguientes formas:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Cambio de } y}{\text{Cambio de } x} = \frac{\text{Cambio Vertical}}{\text{Cambio Horizontal}} = \frac{\text{Elevación}}{\text{Avance}}$$

Ejemplos: Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1. $P_1(-3, 2)$ y $P_2(1, -3)$

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$P_1(x_1, y_1) = (-3, 2) \text{ y } P_2(x_2, y_2) = (1, -3)$$

$$m = \frac{-3 - 2}{1 - (-3)} = \frac{-5}{1 + 3} = -\frac{5}{4}$$

$$m = -\frac{5}{4}$$

... Fórmula de la pendiente.

... Usando $(x_1, y_1) = (-3, 2)$ y usando también $(x_2, y_2) = (1, -3)$. No tiene importancia, cuál de los dos puntos se llama (x_1, y_1) ó (x_2, y_2) ya que la razón contenida, es decir la pendiente m , es la misma.

... Sustituyendo $y_2 = -3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_1 = -3$. Operando y simplificando.

... Resp.

2. A(2, 2) y B(3, 3)

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$A(x_1, y_1) = (2, 2) \text{ y } B(x_2, y_2) = (3, 3)$$

$$m = \frac{3 - 2}{3 - 2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$m = 1$$

... Fórmula de la pendiente.

... Usando $(x_1, y_1) = (2, 2)$; $(x_2, y_2) = (3, 3)$.

... Sustituyendo $y_2 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 3$; $x_1 = 2$
Operando y simplificando.

... Resp.

3. C(3, 2) y D(2, 2)

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$C(x_1, y_1) = (2, 2) \text{ y } D(x_2, y_2) = (3, 2)$$

$$m = \frac{2 - 2}{3 - 2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$m = 0$$

... Fórmula de la pendiente.

... Usando $(x_1, y_1) = (2, 2)$; $(x_2, y_2) = (3, 2)$.

... Sustituyendo, operando y simplificando.

... Resp.

4. A(-2, 2) y B(-2, -3)

Solución:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$C(x_1, y_1) = (-2, 2) \text{ y } D(x_2, y_2) = (-2, -3)$$

$$m = \frac{-3 - 2}{-2 - (-2)} = \frac{-5}{-2 + 2} = \frac{-5}{0}$$

m = no está definida

... Fórmula de la pendiente.

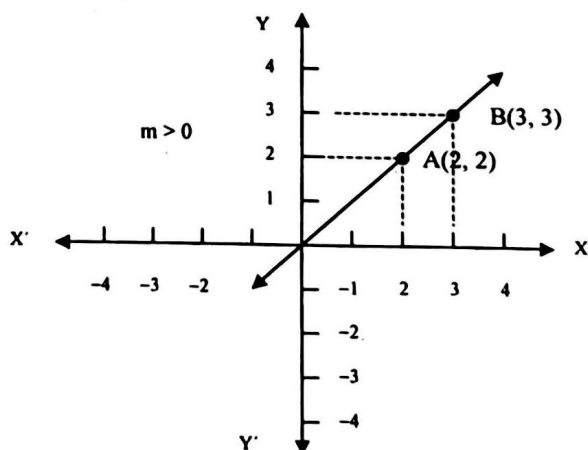
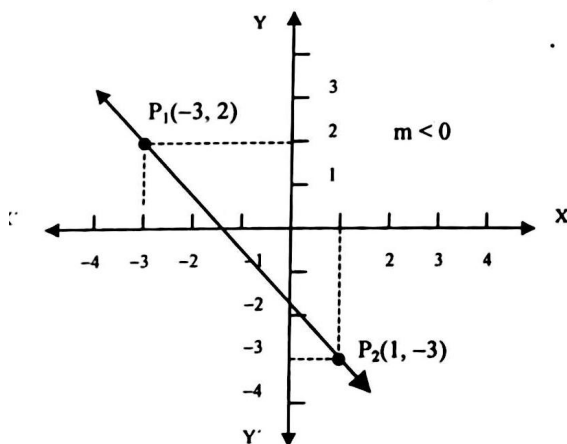
... ¿Qué se hizo?

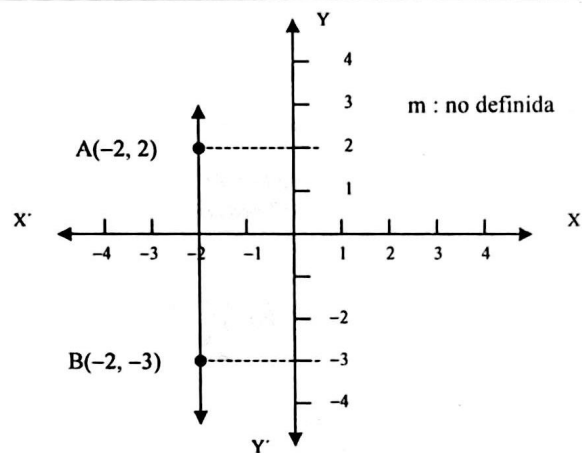
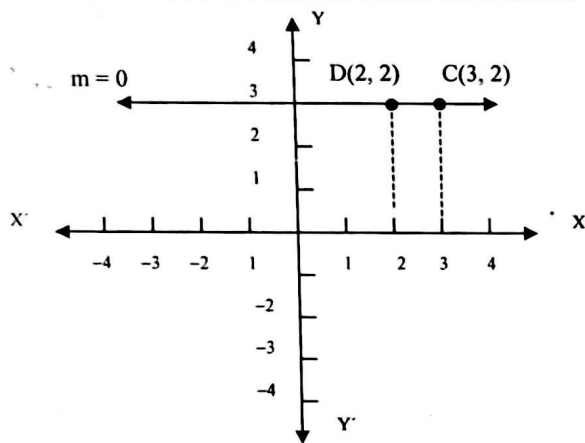
... Sustituyendo y operando.

... La división por cero no está definida

... Resp.

Se presentan a continuación las gráficas de las rectas de cada uno de los 4 ejemplos anteriores:





GUIA DE ESTUDIO No. 27

Dibujar la gráfica de cada función empleando una tabla de valores o las coordenadas al origen y un punto cualquiera más, para comprobación:

- | | | |
|-----------------|-------------------|------------------|
| 1. $y = 4 - 2x$ | 2. $y = 2x - 4$ | 3. $y = -3x - 9$ |
| 4. $x - 2y = 4$ | 5. $3x + y = 6$ | 6. $y = -5 - 2x$ |
| 7. $y = 2x - 1$ | 8. $2y = -3x + 6$ | 9. $y = 3x + 2$ |

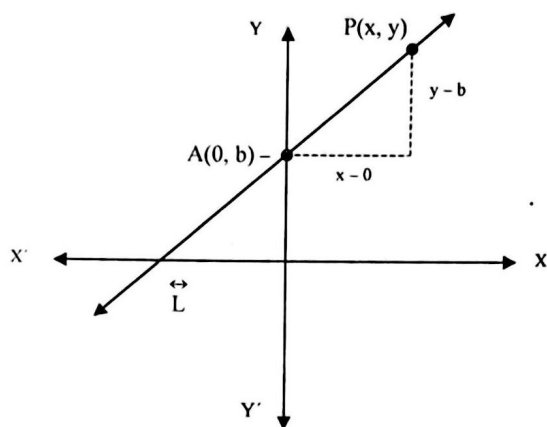
Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

- | | | |
|--|--|--|
| 10. $A(-1, 2); B(2, -1)$ | 11. $A(2, 3); B(3, 2)$ | 12. $A(1, 1); B(-1, -1)$ |
| 13. $A(3, 0); B(0, -3)$ | 14. $A(3, -4); B(0, 0)$ | 15. $A(\frac{1}{2}, 7); B(-4, -\frac{3}{2})$ |
| 16. $A(\frac{1}{4}, 2); B(-3, -\frac{3}{2})$ | 17. $A(\frac{4}{5}, -\frac{3}{7}); B(-3, 2)$ | 18. $A(-3.5, 7); B(-1.3, -6.2)$ |
| 19. $A(0, 0); B(-7.5, -3.2)$ | 20. $A(\frac{4}{3}, 0.95); B(-3, 1)$ | 21. $A(9.9, -8.8); B(-7.7, -6)$ |

5.5. LA ECUACION DE LA RECTA: PENDIENTE – ORDENADA EN EL ORIGEN

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Identificar la orientación de la gráfica de una línea recta de acuerdo al signo de la pendiente.
- ♦ Escribir la ecuación de una línea recta dada la pendiente y la ordenada en el origen.



La gráfica de la izquierda ilustra una recta que tiene pendiente m y la ordenada en el origen b . Para encontrar la ecuación de la recta $\vec{L}$, se empieza considerando cualquier punto $P(x, y)$ diferente del punto $(0, b)$ sobre la recta dada.

Como la pendiente de la recta está dada por dos de sus puntos sean cuales sean, se puede usar $A(0, b)$ y $P(x, y)$ para escribir:

$$m = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x} \text{ entonces}$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

Lo anterior conduce a la siguiente forma de la ecuación de una recta:

$y = mx + b$

ecuación de la recta forma "pendiente – ordenada en el origen"

donde: m = pendiente de la recta.
 b = ordenada en el origen.

Ejemplos: Determinar la ecuación de la recta si:

1. $m = \frac{3}{4}$ y $b = 2$

Solución:

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

... Ecuación "pendiente – ordenada en el origen"

... Sustituyendo valores.

... Resp.

$$2. \quad m = -\frac{2}{5} \text{ y } b = -\frac{3}{2}$$

Solución:

$$y = mx + b$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \left(-\frac{3}{2}\right)$$

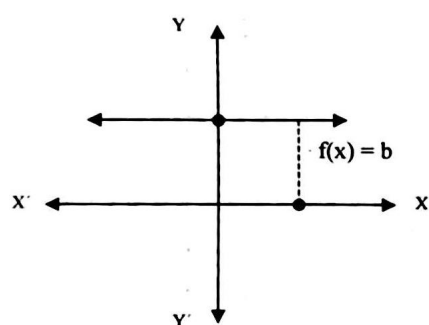
$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{2}$$

... Ecuación “pendiente – ordenada en el origen”

... Sustituyendo y operando.

... Resp.

Un caso especial de $y = f(x) = mx + b$ se obtiene cuando $m = 0$



Si $m = 0$ entonces la ecuación se convierte en:

$$y = mx + b$$

$$y = 0(x) + b$$

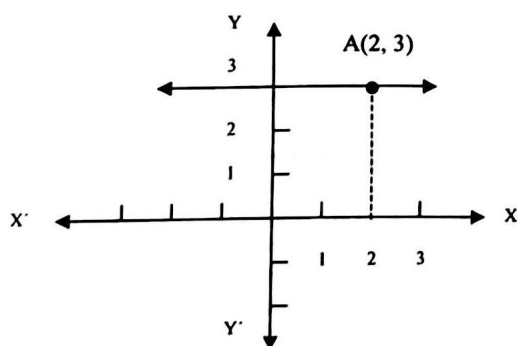
$$y = b$$

Lo anterior significa que cada valor de x siempre tiene como imagen el mismo valor: b . A este tipo de función lineal se le llama función constante y su gráfica siempre es una línea horizontal cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y el Rango es únicamente b .

INVESTIGACION: ¿Es posible que una recta vertical constituya la gráfica de una función en la que y dependa de x ? Explíquelo.

1. Trazar la gráfica después de escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y que es:

a) Paralela al Eje XX'



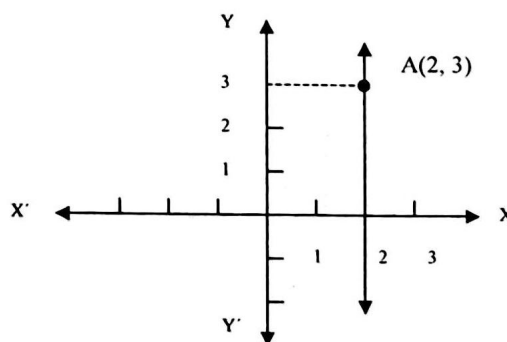
La ordenada en el origen es 3 y la pendiente es 0, por tanto la ecuación es:

$$y = 0(x) + 3$$

$$y = 3$$

... Resp.

b) Paralela al Eje YY'



La recta no tiene ordenada en el origen; además, la pendiente no está definida; es decir, no existe pendiente. En la figura de arriba se observa que y puede tener cualesquier valor real pero x siempre es 2; por tanto la ecuación es:

$$x = 2$$

... Resp.

IMPORTANTE:

1. En general una **recta horizontal** que pasa por el punto $A(h, k)$ corresponde a una ecuación de la forma:

$$y = k$$

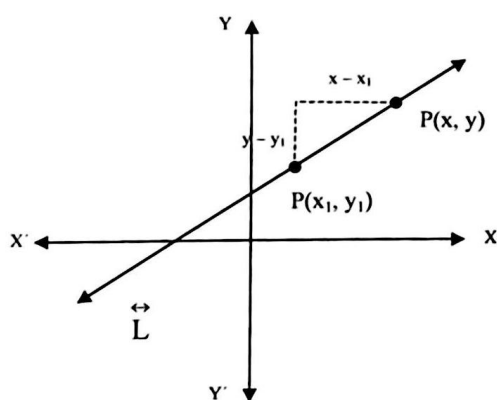
2. En general una **recta vertical** que pasa por el punto $A(h, k)$ corresponde a una ecuación de la forma:

$$x =$$

5.6. ECUACION DE LA RECTA: PUNTO – PENDIENTE

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Identificar la fórmula de la ecuación de la recta punto – pendiente.
- ♦ Escribir la ecuación de la recta, dado un punto y la pendiente.
- ♦ Escribir la ecuación de la recta dados dos puntos.
- ♦ Calcular la pendiente y la ordenada en el origen tanto de una ecuación de la recta en su forma general o explícita, como la de la implícita.



Sea la recta $\vec{L}$ de la izquierda con pendiente m , que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$. Se desea determinar las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ que pertenece a la recta $\vec{L}$.

En la figura, se observa que $P(x, y)$ pertenece a la recta, si y solamente si se verifica que:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Efectuando operaciones, esa razón nos conduce a otra ecuación de la recta. Tal ecuación es la siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ecuación de la recta forma: “punto – pendiente”.

donde m = Pendiente.

$P(x_1, y_1)$ = Un punto cualquiera de la recta.

x, y = Variables que intervienen en la ecuación.

La forma de la ecuación **punto – pendiente** de una recta, es la que se usa con más frecuencia en el Cálculo.

Ejemplos. Determinar la ecuación de la recta que:

1. Pasa por $P(2, -3)$ con pendiente $m = 2$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y - y_1 &= m(x - x_1) \\
 y - (-3) &= 2(x - 2) \\
 y + 3 &= 2x - 4 \\
 y &= 2x - 4 - 3 \\
 y &= 2x - 7
 \end{aligned}$$

... Ecuación de la recta “punto – pendiente”
 ... Sustituyendo $x_1 = +2$, y $y_1 = -3$
 ... Operando.
 ... Transponiendo y operando.
 ... **Resp.**

2. Pasa por A(6, -4) y B(-3, 8)

Solución:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 m &= \frac{-4 - 8}{6 - (-3)} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3} \\
 y - y_1 &= m(x - x_1) \\
 y - (-4) &= -\frac{4}{3}(x - 6) \\
 y + 4 &= -\frac{4}{3}x + \frac{24}{3} \\
 y &= -\frac{4}{3}x + 8 - 4 \\
 y &= -\frac{4}{3}x + 4
 \end{aligned}$$

... Ecuación de la pendiente. Hay que calcular primero el valor de la pendiente **m**.
 ... Calculando la pendiente **m**, haciendo a $y_2 = -4$, $y_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_1 = -3$.
 ... Ecuación Punto – Pendiente.
 ... Sustituyendo en la fórmula, uno cualquiera de los puntos dados. A(6, -4) en este caso.
 ... Operando.

... **Resp.**

3. Pasa por A(-2, 3) y B(2, 4)

Solución:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{2 - (-2)} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4} \\
 y - y_1 &= m(x - x_1) \\
 y - 4 &= \frac{1}{4}(x - 2) \\
 y - 4 &= \frac{1}{4}x - \frac{2}{4} + 4 \\
 y &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 8 \\
 y &= \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

... Calculando primero la pendiente **m**, usando los dos puntos dados.
 ... Ecuación Punto – Pendiente.
 ... Sustituyendo en la fórmula, uno cualquiera de los puntos dados. B(2, 4) en este caso y **m** encontrada antes.
 ... Operando y transponiendo términos.

... **Resp.**

4. Pasa por A(-2, -5) y con pendiente $m = -\frac{2}{3}$

Solución:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

... Ecuación Punto – Pendiente.

$$y - (-5) = -\frac{2}{3}[x - (-2)]$$

... Sustituyendo valores y operando.

$$y + 5 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} - 5$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$$

... Resp.

IMPORTANTE:

1. La Forma General o Forma Explícita de la ecuación de una línea recta es:



$$Ax + By + C = 0$$

A, B, C ∈ R; A ≠ 0 ó B ≠ 0

2. La Forma Pendiente – Ordenada en el Origen, se obtiene de despejar y de la ecuación anterior, así:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

donde la Pendiente es: $m = -\frac{A}{B}$ y la Ordenada en el origen es: $b = -\frac{C}{B}$

GUIA DE ESTUDIO No. 28

Escribir la ecuación de la recta en la forma **pendiente – ordenada al origen**, si:

1. $m = 2; b = 3$

2. $m = -2; b = 1$

3. $m = 1; b = 1$

4. $m = -1; b = 2$

5. $m = 0; b = 5$

6. $m = \frac{1}{2}; b = -3$

7. $m = -\frac{3}{4}; b = -\frac{3}{4}$

8. $m = \frac{1}{2}; b = \frac{2}{5}$

9. $m = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{2}$

Escribir cada ecuación en la forma **pendiente – ordenada al origen**. Señalar la pendiente **m** y la ordenada al origen **b** de cada ecuación:

10. $3x + y = 4$

11. $2x - y = 5$

12. $6x - 3y = 1$

13. $3y - 5 = 0$

14. $x = \frac{1}{2}y + 3$

15. $4x - 3y - 7 = 0$

16. $\frac{2}{3}x - 2y = 8$

17. $2x - \frac{1}{3}y = 0$

18. $2y = 0$

Encontrar la ecuación de la recta y escribirla en la forma *pendiente – ordenada al origen*, si se dan:

- | | | |
|---|-------------------------------------|--|
| 19. $m = 2$; $P(3, 4)$ | 20. $m = -\frac{2}{7}$; $P(-3, 5)$ | 21. $m = -1$; $P\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ |
| 22. $m = \frac{1}{2}$; $P\left(-2, \frac{3}{4}\right)$ | 23. $A(-1, 2)$; $B(2, -1)$ | 24. $A(2, 3)$; $B(-2, -3)$ |
| 25. $A\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$; $B(2, 3)$ | 26. $A(1, 2)$; $B(2, 2)$ | 27. $A(2.3, 0.4)$; $B(-1.08, -3.2)$ |
| 28. $A\left(-\frac{3}{4}, 0.75\right)$; $B\left(-0.8, -\frac{5}{4}\right)$ | | |

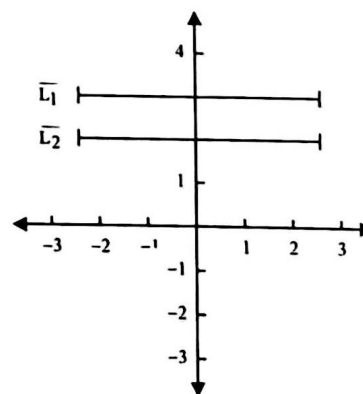
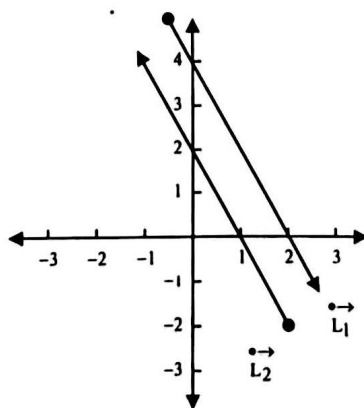
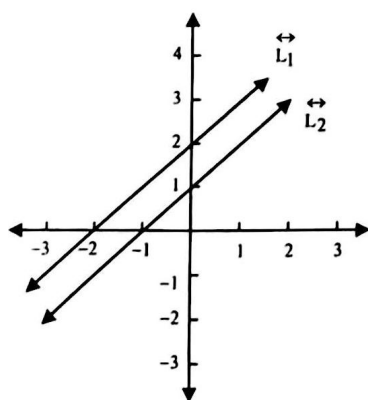
5.7. CONDICIONES DE PARALELISMO. RECTAS PARALELAS

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ◆ Identificar en base a las pendientes, cuándo dos o mas rectas son paralelas.
- ◆ Representar gráficamente dos rectas paralelas.
- ◆ Identificar cuando dos rectas son paralelas a partir de sus correspondientes ecuaciones.
- ◆ Calcular la ecuación de una recta que pasa por un punto dado y es paralela a otra cuya ecuación también se da.

DEFINICION: Dadas las rectas $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ con pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, se dice que $\vec{L}_1$ es paralela a $\vec{L}_2$ y se representa por $\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$ si y solo si sus pendientes son iguales.

$$\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2 \text{ ssi } m_1 = m_2$$



El signo “ $\parallel$ ” se lee: “*es paralelo a...*”. Las figuras anteriores, muestran rectas paralelas en posiciones diferentes. La condición de paralelismo es también válida para segmentos y rayos sin importar la posición de los mismos.

Ejemplo 1. Los puntos A(1, 6) y B(-1, 2) están sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$; C(2, 3) y D(-1, -3) están sobre la recta $\overleftrightarrow{CD}$. a) Determinar si las rectas son paralelas; b) Comprobar gráficamente la respuesta anterior.

Solución:

a) m_1 = Pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$

m_2 = Pendiente de la recta $\overleftrightarrow{CD}$

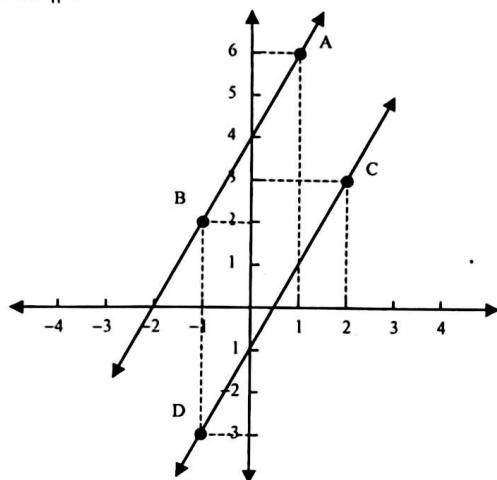
$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 6}{-1 - 1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$m_1 = m_2$ Entonces las dos rectas son paralelas

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

b)



... Especificando las pendientes de ambas rectas.

... Calculando la pendiente de las dos rectas

... $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ porque sus pendientes son iguales.

... Resp.

... La gráfica de la izquierda muestra que efectivamente la recta $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

... Resp.

Ejemplo 2. Determinar si son paralelas las rectas cuyas ecuaciones son las que se dan a continuación:

$$\begin{cases} -2x - 3y = 4 \\ 3y + 2x = -2 \end{cases}$$

Solución:

$$-2x - 3y = 4$$

$$-3y = 2x + 4$$

$$y = \frac{2x + 4}{-3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$3y + 2x = -2$$

$$3y = -2x - 2$$

$$y = \frac{-2x - 2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

... Escribiendo ambas ecuaciones en la forma **pendiente – ordenada al origen** o sea, despejando la variable y de las ecuaciones respectivas.

$$m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$m_2 = -\frac{2}{3}$$

... En la ecuación de la recta en su forma pendiente – ordenada al origen, la pendiente **m**, viene dada por el coeficiente del término que contiene a la variable **x** y la ordenada al origen, por el término independiente.

$$m_1 = m_2 = -\frac{2}{3}$$

Las rectas son paralelas

... Las pendientes son iguales.

... Resp.

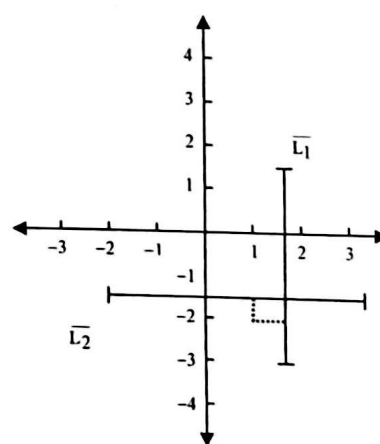
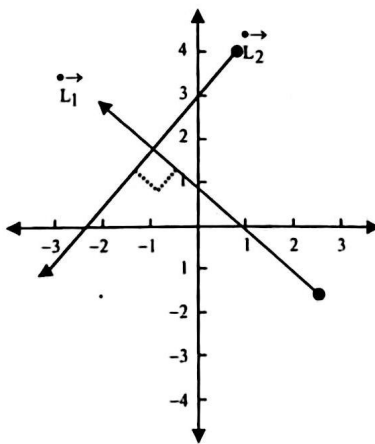
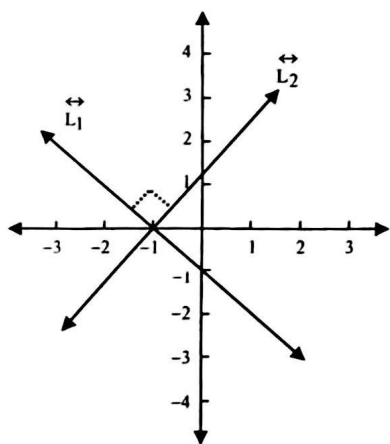
5.8. CONDICIONES DE PERPENDICULARIDAD. RECTAS PERPENDICULARES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Identificar en base a sus pendientes, cuando dos rectas son perpendiculares entre sí.
- ♦ Representar gráficamente dos rectas perpendiculares.
- ♦ Identificar cuando dos rectas son perpendiculares a partir de sus correspondientes ecuaciones.
- ♦ Identificar cuando dos rectas son oblicuas.
- ♦ Calcular la ecuación de una recta que pasa por un punto dado y es perpendicular a otra cuya ecuación también se da.

DEFINICION: Dadas las rectas $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ con pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, se dice que $\vec{L}_1$ es perpendicular a $\vec{L}_2$ y se representa por $\vec{L}_1 \perp \vec{L}_2$, si y solo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario; en otras palabras, cuando el producto de sus pendientes es -1 .

El signo “ $\perp$ ” se lee: “*es perpendicular a...*”. Dos rectas que se cruzan en un ángulo recto (90°), se dice que son rectas perpendiculares. La posición de ellas no es importante. La condición de perpendicularidad es válida también para segmentos y rayos, sin importar la posición de los mismos. Ver figuras de abajo.



Ejemplo 1. Los puntos A(2, -3) y B(6, 3) están sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$; C(6, -2) y D(0, 2) están sobre la recta $\overleftrightarrow{CD}$. a) Determinar si las rectas son perpendiculares; b) Comprobar gráficamente la respuesta anterior.

Solución:

a) m_1 = Pendiente de la recta $\overleftrightarrow{AB}$

m_2 = Pendiente de la recta $\overleftrightarrow{CD}$

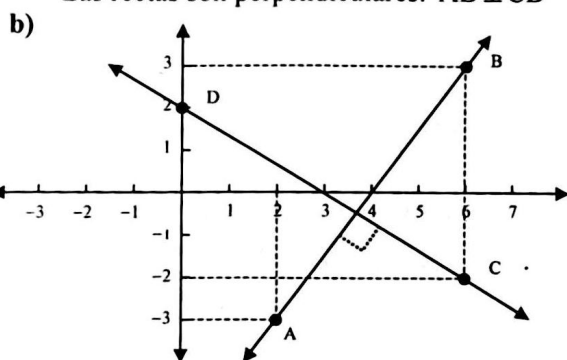
$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (-3)}{6 - 2} = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{0 - 6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$m_1 m_2 = \frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{6}{6} = -1$$

$$m_1 m_2 = -1$$

Las rectas son perpendiculares: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$



... Especificando las pendientes de ambas rectas.

... Calculando la pendiente de las dos rectas

... Comprobando la condición de perpendicularidad.

... El producto de sus pendientes es -1.

... **Resp.**

... La gráfica de la izquierda muestra que efectivamente ambas rectas se cortan en un ángulo recto (90°).

... **Resp.**

Ejemplo 2. Determinar si son perpendiculares las rectas cuyas ecuaciones se dan a continuación:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$5x - 3y = 8$$

$$-3y = -5x + 8$$

$$y = \frac{-5x + 8}{-3}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$m_1 = \frac{5}{3}$$

$$3x + 5y = 2$$

$$5y = -3x + 2$$

$$y = \frac{-3x + 2}{5}$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$m_2 = -\frac{3}{5}$$

$$m_1 m_2 = \frac{5}{3} \left(-\frac{3}{5} \right) = -\frac{15}{15} = -1$$

Las rectas son perpendiculares

... Escribiendo ambas ecuaciones en la forma **pendiente - ordenada al origen** o sea, despejando y.

... Las pendientes m_1 y m_2 corresponden respectivamente a coeficientes de x en la ecuación.

... El producto de las pendientes es -1.

... **Resp.**

- IMPORTANTE:**
- 
1. Si dos rectas no son paralelas ni perpendiculares entre sí, necesariamente esas rectas son oblicuas.
 2. Lo anterior quiere decir que si dos rectas tienen las siguientes características:
a) $m_1 \neq m_2$ y b) $m_1 m_2 \neq -1$
entonces esas dos rectas son oblicuas.
 3. Si dos rectas son perpendiculares entonces: $m_1 = \frac{1}{m_2}$ ó $m_1 m_2 = -1$.

Se presentan a continuación ejemplos de problemas que combinan las condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Ejemplo 1. Determinar la ecuación de la recta en su forma pendiente – ordenada al origen que pasa por el punto A(4, 5) y es paralela a la recta: $3x - 2y - 3 = 0$.

Solución:

$$-2y = -3x + 3$$

$$y = \frac{-3x + 3}{-2} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \text{ entonces } m_1 = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = m_1 = \frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 4)$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}x - \frac{12}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 6 + 3$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

... Escribiendo la ecuación de la recta dada en su forma pendiente – ordenada al origen para determinar su pendiente m_1 (despejando y)

... Las pendientes son iguales porque son rectas paralelas ($m_1 = m_2$).

... Ecuación de la recta punto – pendiente donde se conoce $m = \frac{3}{2}$ y A(4, 5).

... Sustituyendo valores, operando y despejando para y.

... Ecuación de la recta paralela a la recta dada. ... Resp.

Ejemplo 2. Determinar la ecuación de la recta en su forma pendiente – ordenada al origen que pasa por el punto A(-2, 4) y es paralela a la recta: $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

Solución:

$$y = -\frac{2}{3}x + 3 \text{ entonces } m_1 = -\frac{2}{3}$$

... La pendiente de la recta dada es $m_1 = -\frac{2}{3}$ es el coeficiente de la variable x cuando está despejada y.

$$m_1 = m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 2)$$

$$y - 4 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 4$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

... Porque son rectas paralelas.

... Ecuación de la recta punto – pendiente.

... Sustituyendo valores donde $m = -\frac{2}{3}$,
A(-2, 4) y operando.

... Ecuación de la recta paralela a la recta
dada. ... Resp.

Ejemplo 3. Determinar la ecuación de la recta que pasa por A(4, 3) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $5y + 10x = 7$.

Solución:

$$5y + 10x = 7$$

$$5y = -10x + 7$$

$$y = \frac{-10x + 7}{5} = -\frac{10x}{5} + \frac{7}{5}$$

$$y = -2x + \frac{7}{5}, \text{ entonces } m_1 = -2$$

$$\text{Si } m_1 = -2 \text{ entonces } m_2 = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

... Ecuación de la recta dada.

... Despejando y para calcular la pendiente
de dicha recta.

... La pendiente de la recta perpendicular es
el recíproco y opuesto simultáneamente
de la pendiente de la recta dada.

... Ecuación de la recta punto – pendiente.

... Sustituyendo valores y operando donde
 $m_2 = \frac{1}{2}$ y A(4, 3).

... Ecuación de la recta perpendicular a la
recta dada. ... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 29

En base al cálculo de las pendientes determinar si son a) Paralelas, b) Perpendiculares, c) Oblicuas, las rectas cuyas ecuaciones son:

1. $x + y = 8$
 $2x + 2y = 0$

2. $2x - y = 6$
 $x + 2y = 10$

3. $3x + 2y = 6$
 $2x - 3y = 4$

4. $5x + 3y = 10$
 $5y = 12 - 3y$

5. $2x = 5 - 3y$
 $4x = 3y - 7$

6. $5x - 3y - 8 = 0$
 $10x - 6y + 8 = 0$

7. $3y = 2 - 6x$
 $2x = 3 - 6y$

8. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 0$
 $\frac{3}{2}x - y - 4 = 0$

9. $7x - 4y = 12$
 $4x + 7y = 12$

10. $-x + y = 0$
 $2x + 2y = 4$

11. $x + 2y = 0$
 $2x - y = 6$

12. $2x + 3y = 8$
 $3x - y = 1$

13. $x + 2y = 3$
 $2x - 4y = 6$

14. $x - 2y = 3$
 $3x - 6y = 9$

15. $4x - 3y = 2$
 $5x + y = -7$

16. $2x - y - 7 = 0$
 $3x + 4y - 5 = 0$

17. $3x + 2y = 12$
 $6x + 4y = 6$

18. $-x + 5y = 3$
 $5x + y = 6$

Determinar la ecuación de la recta en su forma a) pendiente – ordenada al origen y b) forma general.

19. Pasa por A(3, -2) y es paralela a $y = 2x + 4$

20. Pasa por B($\frac{1}{2}$, 3) y es paralela a $2x + 3y - 9 = 0$

21. Pasa por C($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$) y es paralela a $3x = 2y + 6$

22. Pasa por D(-4, $\frac{3}{4}$) y es paralela a $y = \frac{2}{3}x - 5$

23. Pasa por E(2, 3) y es perpendicular a $y = 2x - 3$

24. Pasa por F(-2, 4) y es perpendicular a $4x - 2y = 8$

25. Pasa por G($\frac{1}{2}$, -3) y es perpendicular a $5x = -2y + 3$

26. Pasa por H(- $\frac{2}{3}$, -4) y es perpendicular a $\frac{1}{2}x = y - 6$

27. Pasa por I(1, 2) y es perpendicular a $3x + 2y = 7$

28. Pasa por J(0, 0) y es paralela a $5x - 7y = 0$

29. Pasa por K(-2, -1) y es paralela a $-x + 3y = 5$

30. Pasa por L(-4, -2) y es paralela a $2x - 5y = 2$

31. Pasa por M(1, 2) y es perpendicular a $2y - 3x = 1$

32. Pasa por N(-1, -1) y es perpendicular a $-2y - x = 3$

*

5.9. RELACIÓN CUADRÁTICA. LA PARABOLA

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Identificar una relación cuadrática y sus componentes.
- ♦ Dibujar la gráfica de una función cuadrática dentro de un dominio dado y utilizando una tabla de valores.
- ♦ Identificar la concavidad, punto máximo o mínimo de una parábola.
- ♦ Calcular algunos puntos importantes de la parábola: vértice, intersección en $\overleftrightarrow{XX'}$ (I_x) y en $\overleftrightarrow{YY'}$ (I_y), eje de simetría, dominio y rango.

La expresión definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ se llama **función cuadrática** o **de segundo grado**.

Ejemplos. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $\text{Dom } f(x) = [-2, 4[$

Solución:

En este tipo de funciones conviene tomar más puntos que en una lineal para que la gráfica quede mejor trazada y por tanto bien definida. Véase figura 22.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5 \\ f(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0 \\ f(0) &= (0)^2 - 2(0) - 3 = -3 \\ f(1) &= (1)^2 - 2(1) - 3 = -4 \\ f(2) &= (2)^2 - 2(2) - 3 = -3 \\ f(3) &= (3)^2 - 2(3) - 3 = 0 \\ f(4) &= (4)^2 - 2(4) - 3 = 5 \end{aligned}$$

x	y	(x, y)
-2	5	(-2, 5)
-1	0	(-1, 0)
0	-3	(0, -3)
1	-4	(1, -4)
2	-3	(2, -3)
3	0	(3, 0)
4	5	(4, 5)

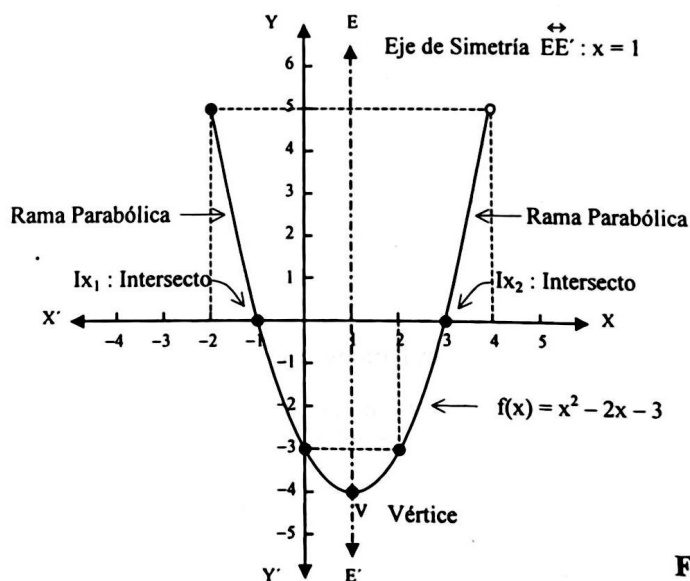


Fig. 22

Como el dominio de la función es un subconjunto de los números Reales $\mathbb{R}$, cerrado en un extremo (-2) y abierto en el otro (4) , la gráfica termina sus ramas con un círculo “relleno” y otro “vacío” respectivamente. Véase Fig. 22.

2. $h(x) = -x^2 + 2$

Solución:

$$\begin{aligned}
 h(-2) &= -(-2)^2 + 2 = -2 \\
 h(-1) &= -(-1)^2 + 2 = 1 \\
 h(0) &= -(0)^2 + 2 = 2 \\
 h(1) &= -(1)^2 + 2 = 1 \\
 h(2) &= -(2)^2 + 2 = -2
 \end{aligned}$$

x	y	(x, y)
-2	-2	(-2, -2)
-1	1	(-1, 1)
0	2	(0, 2)
1	1	(1, 1)
2	-2	(2, -2)

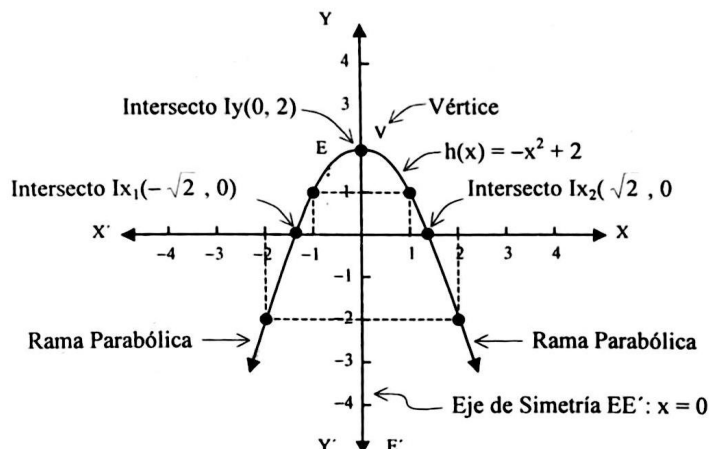


Fig. 23

La curva dibujada en los ejemplos 1 y 2 anteriores se llama **parábola**. El punto V se llama **vértice**, las partes de la curva a la izquierda y derecha del vértice V, se llaman **ramas parabólicas** y la recta que pasa por el vértice y es paralela al eje YY' se llama **eje de simetría EE'**.

En el ejemplo 1, la parábola abre sus ramas hacia arriba, porque el coeficiente del término cuadrático es positivo. El vértice V es el punto más bajo y por ello se dice que es **punto mínimo**; cuando esto sucede se dice que la parábola es **cóncava hacia arriba**. En el ejemplo 2, la parábola abre sus ramas hacia abajo porque el coeficiente del término cuadrático es negativo. El vértice es el punto más alto y por ello se dice que es **punto máximo**; cuando esto sucede se dice que la parábola es **cóncava hacia abajo**. La parábola del ejemplo 2, termina sus ramas en flechas porque el dominio no se dio y cuando esto pasa, se sobreentiende que el dominio es el conjunto R.

Resumiendo, se puede afirmar lo siguiente del ejemplo 1 y 2:

- ♦ Los cuadros o tablas de valores, se obtuvieron dando valores a x tomados del dominio dado, aplicándole la función mediante la sustitución de valores y la operación respectiva para encontrar la imagen y formar una serie de parejas ordenadas de números reales.
- ♦ Se grafican en un plano cartesiano el conjunto de parejas ordenadas obtenidas en la tabla o cuadro y se traza la curva respectiva.
- ♦ En el ejemplo 1, se puede observar lo siguiente: Fig. 22
 - $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$
 - $a > 0$ y la parábola es cóncava hacia arriba.
 - La gráfica de la función, corta el eje XX' en los puntos Ix1 e Ix2 llamados Intersectos en XX' y corta también al eje YY' en el punto Iy. Las coordenadas de esos puntos son respectivamente: Ix1 (-1, 0); Ix2 (3, 0); Iy (0, -3)
 - El vértice V es un punto mínimo. ¿Porqué?
 - Las ramas parabólicas terminan en un círculo "relleno" y en un círculo "vacío". ¿Porqué?
 - Eje de Simetría ES: $x = 1$
 - $\text{Ran } f(x) = [-4, +\infty[$

♦ En el ejemplo 2 de la Fig. 23 puede observarse lo siguiente:

- $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$
- $a < 0$ y la parábola es cóncava hacia abajo.
- Los intersecciónes en XX' son $Ix_1(-\sqrt{2}, 0)$, $Ix_2(\sqrt{2}, 0)$.
- El intersección en YY' es $Iy(0, 2)$.
- El vértice V es un punto máximo y sus coordenadas son las mismas que las de Iy . ¿Porqué?
- El Eje de Simetría $\overleftrightarrow{EE'}$ coincide con el eje YY' . $\overleftrightarrow{EE'} : x = 0$
- Las ramas parabólicas terminan en flechas. ¿Porqué?
- $\text{Ran } f(x) =]-\infty, 2]$

3. $g(x) = x^2 - 2x + 1$; $\text{Dom } g(x) =]-\infty, 3 [$

Solución:

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^2 - 2(-2) + 1 = 9 \\ g(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4 \\ g(0) &= (0)^2 - 2(0) + 1 = 1 \\ g(1) &= (1)^2 - 2(1) + 1 = 0 \\ g(2) &= (2)^2 - 2(2) + 1 = 1 \\ g(3) &= (3)^2 - 2(3) + 1 = 4 \end{aligned}$$

x	y	(x, y)
...	...	...
-2	9	(-2, 9)
-1	4	(-1, 4)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)
2	1	(2, 1)
3	4	(3, 4)

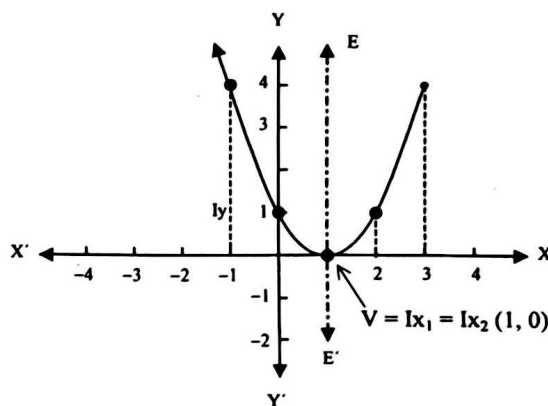


Fig. 24

4. $q(x) = 8 - 2x - x^2$; $\text{Dom } q(x) =]-\infty, 2 [$

Solución:

$$\begin{aligned} g(-5) &= 8 - 2(-5) - (-5)^2 = -7 \\ g(-4) &= 8 - 2(-4) - (-4)^2 = 0 \\ g(-3) &= 8 - 2(-3) - (-3)^2 = 5 \\ g(-2) &= 8 - 2(-2) - (-2)^2 = 8 \\ g(-1) &= 8 - 2(-1) - (-1)^2 = 9 \\ g(0) &= 8 - 2(0) - (0)^2 = 8 \\ g(1) &= 8 - 2(1) - (1)^2 = 5 \\ g(2) &= 8 - 2(2) - (2)^2 = 0 \end{aligned}$$

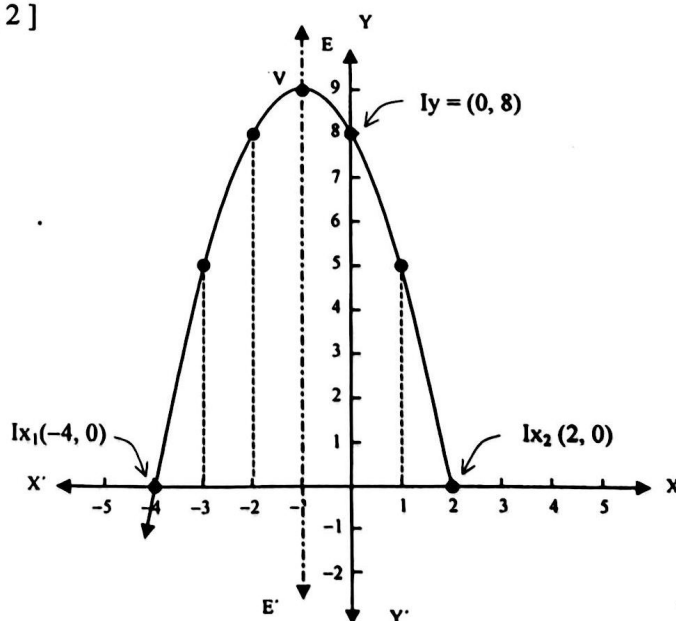


Fig. 25

- ♦ En el ejemplo 3 de la Fig. 24 puede observarse lo siguiente:
 - $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$
 - $a > 0$ y la parábola es cóncava hacia arriba.
 - Los intersecciónes en XX' coinciden con el vértice y sus coordenadas son $(1, 0)$.
 - El vértice V , es punto mínimo. ¿Porqué?
 - Las ramas parabólicas, una de ellas termina en flecha y la otra en un círculo “vacío”, ¿Porqué?
 - El eje de simetría EE' es paralelo al eje YY' y pasa por el vértice. $\overleftrightarrow{EE'} : x = 1$.
 - $\text{Ran } f(x) = [0, +\infty[$
- ♦ En el ejemplo 4 de la Fig. 25 ¿Qué puede concluir?

IMPORTANTE:

1. Los intersecciónes con el eje XX' de una función cuadrática (si existen) se calculan cuando se hace $f(x) = y = 0$ y se resuelve la ecuación cuadrática resultante mediante la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.
2. Si en una función cuadrática dada, se tiene que $a > 0$ entonces el vértice es un punto mínimo y si $a < 0$, el vértice es punto máximo.
3. En cualquiera de los casos del No. 2, el eje de simetría siempre es paralelo al eje YY' .
4. La ecuación del eje de simetría se calcula con: $x = -\frac{b}{2a}$
5. Las coordenadas del vértice se pueden calcular con la expresión:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Estas coordenadas, dependen de los valores a , b , c de la función cuadrática.

Existen varias maneras de trazar la gráfica de una función cuadrática. Además de la anteriormente usada, también se puede utilizar la siguiente:

- a) Se calculan las coordenadas del vértice V con la expresión dada en 5 de arriba.
- b) Se calculan los intersecciónes Ix_1 e Ix_2 igualando a 0 la función dada y resolviendo la ecuación cuadrática resultante, usando para ello la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.
- c) Se determina la ecuación del eje de simetría usando la expresión dada en 4 de arriba.
- d) Se calculan las coordenadas de uno o dos puntos a la derecha e izquierda del vértice.
- e) Se traza la gráfica de la función con todos los puntos anteriores y se determina el rango.

Se aclara, que existen algunos casos en que la gráfica de una función cuadrática no tendrá puntos de intersección (Ix_1 , Ix_2) con el eje XX' . Probar para el caso, si la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$ tiene intersecciónes en XX' .

A continuación se presenta un ejemplo para utilizar el procedimiento descrito antes, quedando a opción del profesor, su utilización simultánea con el utilizando en las paginas anteriores.

Dada la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$, determinar:

a) Las coordenadas del vértice

$$a = 1; b = 6; c = 5$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = -4$$

$$V(-3, -4)$$

... Calculando las coordenadas del vértice con la expresión dada.

... Son las coordenadas del vértice ... Resp.

b) Los intersecciones Ix_1 e Ix_2

$$0 = x^2 + 6x + 5$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 4}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{-6 - 4}{2} = -5$$

$$\text{Luego } Ix_1(-1, 0) \text{ e } Ix_2(-5, 0)$$

... Haciendo $f(x) = 0$, resolviendo la ecuación resultante y formando las parejas con las soluciones obtenidas.

... Son los intersecciones en XX' ... Resp.

$$c) f(-4) = (-4)^2 + 6(-4) + 5 = 16 - 24 + 5 = -3$$

$$f(-6) = (-6)^2 + 6(-6) + 5 = 36 - 36 + 5 = 5$$

$$f(0) = (0)^2 + 6(0) + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 6(-2) + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$$

$$A(-4, -3); B(-6, 5); C(0, 5); D(-2, -3)$$

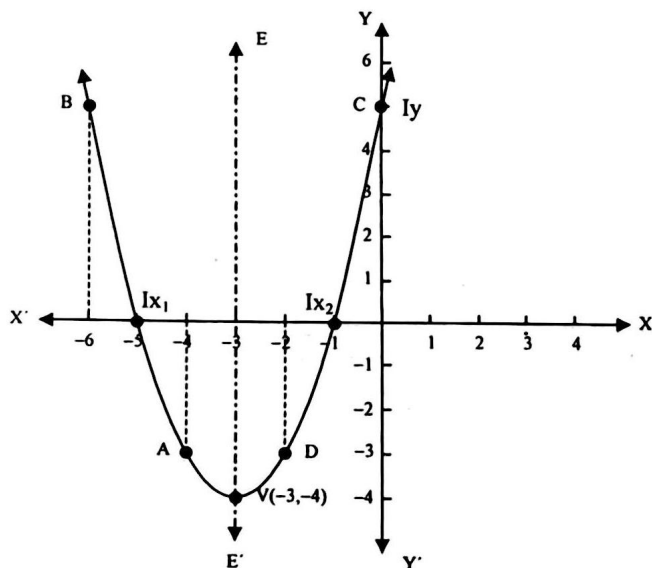
... Tomando -4 y -6 como valores adicionales que están a la izquierda del eje de Simetría, para formar dos parejas adicionales y 0 y -2 para formar otras dos a derecha del eje.

... Coordenadas de las 4 parejas adicionales.

$$d) x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3; \quad x = -3$$

... Ecuación del eje de simetría: $\overleftrightarrow{EE}: x = -3$
... Resp.

... Gráfica de $f(x)$ con las parejas obtenidas.



$$e) \text{Ran } f(x) = [-4, +\infty[$$

... Rango de $f(x)$

... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 30

Dibujar las gráficas de las siguientes funciones dentro del dominio dado: (usar papel cuadriculado)

- | | | | |
|--------------------------|------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| 1. $h(x) = x^2 - 1$ | Dom $h(x) = [-3, 3 [$ | 2. $g(x) = -x^2 + 2$ | Dom $g(x) = \mathbb{R}$ |
| 3. $b(x) = x^2 + 4x + 1$ | Dom $b(x) =] -5, 1 [$ | 4. $y(x) = 2x^2 + 3 + x$ | |
| 5. $s(x) = -x^2 + x - 1$ | | 6. $m(x) = -3 + 4x - x^2$ | |
| 7. $k(r) = -r^2 + 2r$ | | 8. $t(x) = 2x^2 + 4$ | |
| 9. $t(x) = -(x - 1)^2$ | | 10. $g(x) = -(x - 1)^2 - 3$ | |
| 11. $d(x) = -(x + 1)^2$ | | 12. $w(x) = -(x + 1)^2 + 3$ | |

GUIA DE ESTUDIO No. 31

Determinar a) coordenadas del vértice, b) ecuación del eje de simetría, c) las coordenadas de los intersecciones I_{x1} e I_{x2} , d) las coordenadas del intersección en YY' o sea I_y (cuando $x = 0$), e) dos parejas ordenadas a la izquierda y dos a la derecha del eje de simetría EE' , f) trazar la gráfica con los puntos obtenidos, g) el rango.

- | | | |
|--|------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + 2x$ | 2. $g(x) = -x^2 + 2x - 4$ | 3. $h(x) = 3x^2 - 4x + 1$ |
| 4. $i(x) = (x - \frac{1}{2})(5 - x)$ | 5. $j(x) = (x - 3)(x + 1)$ | 6. $k(x) = x^2 + 1$ |
| 7. $l(x) = 4 - 4x - x^2$ | 8. $m(x) = -x^2 + 1$ | 9. $n(x) = -3 + 4x - x^2$ |
| 10. $z(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ | 11. $s(x) = -2(x - 1)^2 - 2$ | 12. $v(x) = 2(x + 1)^2 - 3$ |
| 13. $p(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$ | 14. $q(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ | 15. $w(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$ |
| 16. $s(x) = 2(x - 3)^2 - 5$ | 17. $h(x) = -2(3 - x)^2 - 4$ | 18. $r(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2 - 4$ |

GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 5

Determinar las coordenadas de los puntos de intersección I_x e I_y de las rectas representadas por las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|----------------------|---------------------|--------------------|
| 1. $2x + 5y = 3$ | 2. $3x + 8y = 4$ | 3. $5x + 6y = 2$ |
| 4. $7x - 4y = 1$ | 5. $2x - 3y = 4$ | 6. $4x - 5y = 6$ |
| 7. $3x - 8y = 12$ | 8. $x - 2y + 1 = 0$ | 9. $y + 2x = 5$ |
| 10. $y + 4x - 6 = 0$ | 11. $6x - 5y = 8$ | 12. $4x + 7y = 14$ |

Determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| 13. A(2, 4); B(6, -4) | 14. A(2, 4); B(10, 4) | 15. A(4, -6); B(7, -6) |
| 16. A(-3, -1); B(8, -1) | 17. A(3, -1); B(3, 3) | 18. A(-1, 6); B(-1, 2) |
| 19. A(-4, -5); B(11, 7) | 20. A(3, 8); B(-2, -7) | 21. A(-12, 9); B(0, -15) |

Dibujar la línea recta empleando los dos intersecciones I_x e I_y y un tercer punto cualquiera $P(x, y)$ o si lo desea, hacer una tabla de valores.

- | | | |
|-------------------|-----------------|-------------------|
| 22. $x + y = 3$ | 23. $x + y = 1$ | 24. $x + 2y = 2$ |
| 25. $x + y = 4$ | 26. $x - y = 2$ | 27. $3x + y = 3$ |
| 28. $x - 5y = 10$ | 29. $x - y = 5$ | 30. $2x + 5y = 3$ |

Determinar las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría, dibujar la gráfica correspondiente y el rango.

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 31. $f(x) = x^2 - 1$ | 32. $f(x) = x^2 - 3$ | 33. $f(x) = x^2 - 4$ |
| 34. $f(x) = 1 - x^2$ | 35. $f(x) = 3 - x^2$ | 36. $f(x) = x^2 + 8x + 16$ |
| 37. $f(x) = 3 + 2x - x^2$ | 38. $f(x) = 8 + 2x - x^2$ | 39. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ |

Determinar la ecuación de la recta y escribirla en su forma a) pendiente – ordenada al origen; b) general

40. Pendiente -3 y ordenada al origen 7.
41. Pendiente -4 y ordenada al origen 7.
42. Pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada al origen -5.
43. Pasa por el punto A(5, -2) y pendiente $\frac{1}{3}$
44. Pasa por el punto B(-3, 7) y pendiente -2
45. Pasa por el punto C(-3, -4) y es paralela a la recta $y = 3x - 2$.
46. Pasa por el punto D $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ y es paralela a $2x - 3y - 5 = 0$.
47. Pasa por el punto E(-8, 2) y es perpendicular a $2x - 5y = 3$
48. Pasa por el punto H(2, -3) y es perpendicular a $3x - 2y - 1 = 0$
49. La longitud de un resorte varía con la fuerza aplicada conforme a $\ell = 0.4f$ donde ℓ se da en pulgadas y f en libras. Dibuje la gráfica de ésta ecuación, para 0 y 10 libras.
50. La velocidad de un objeto se describe mediante la ecuación $v = v_0 + at$ donde v_0 es la velocidad inicial y a es la aceleración. Dibuje la gráfica de esta ecuación considerando que $v_0 = 8$ y $a = 3$.

51. Un topógrafo encuentra que la elevación h de una carretera, varía con la distancia a partir de un punto de referencia s de acuerdo a $h = 0.3s + 1.5$. Dibuje la elevación de la carretera como una función de s .
52. El voltaje desarrollado a través de las terminales de un circuito diferenciador, varía con el tiempo de acuerdo con $v = 2t + 0.5V$. Describa la ecuación del voltaje.
53. Las ventas S de una compañía durante sus primeros cinco años de operación están dadas por la ecuación $S = 25,000N + 200,000$ dls, donde N es el año en que la compañía comenzó a operar. Dibuje la curva de las ventas de la compañía durante los primeros cinco años.

Encontrar la distancia $d(P_1, P_2)$ entre los puntos P_1 y P_2 dados. Calcular las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une a P_1 y P_2 .

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 54. $P_1(-1, 0), P_2(2, 1)$ | 55. $P_1(3, -4), P_2(3, 1)$ | 56. $P_1(2, -3), P_2(4, 2)$ |
| 57. $P_1(-3, 2), P_2(6, 0)$ | 58. $P_1(-4, -3), P_2(2, 2)$ | 59. $P_1(4, -3), P_2(6, 1)$ |
| 60. $P_1(1.2, 2.3), P_2(-0.3, 1.1)$ | 61. $P_1(-0.2, 0.3), P_2(2.3, 1.1)$ | 62. $P_1(b, b), P_2(0, 0)$ |
| 63. $P_1(a, b), P_2(0, 0)$ | 64. $P_1(2a, b), P_2(-a, -2b)$ | |

Verificar si el triángulo es rectángulo dados los vértices.

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 65. $A(-2, 5), B(1, 3), C(-1, 0)$ | 66. $A(-2, 5), B(12, 3), C(10, -11)$ |
| 67. $A(-5, 3), B(0, 6), C(5, 5)$ | 68. $A(-6, 3), B(3, -5), C(-1, 5)$ |

Escribir la forma canónica y general de la ecuación del círculo dados el centro C y el radio r .

- | | | |
|-----------------------|----------------------|-----------------------------|
| 69. $C(0, 2), r = 2$ | 70. $C(1, 0), r = 3$ | 71. $C(4, -3), r = 5$ |
| 72. $C(2, -3), r = 4$ | 73. $C(0, 0), r = 2$ | 74. $C(0, 0), r = \sqrt{3}$ |

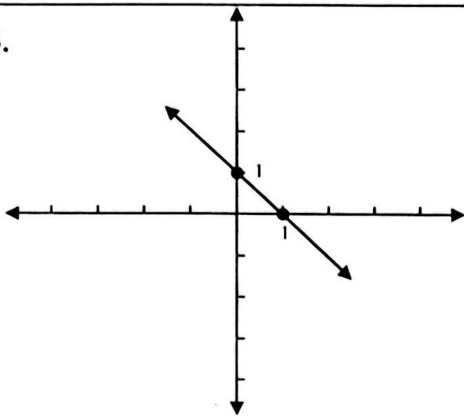
Encontrar las coordenadas del centro, la longitud del radio y la ecuación en su forma canónica y general de un círculo en el que los puntos P y Q son los extremos de un diámetro del mismo:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 75. $P(2, 5), Q(-4, -3)$ | 76. $P(-6, -4), Q(6, 4)$ | 77. $P(4, -3), Q(-2, 7)$ |
| 78. $P(3, -5), Q(-1, 3)$ | 79. $P(4, 5), Q(8, -7)$ | 80. $P(-5, 5), Q(5, -5)$ |

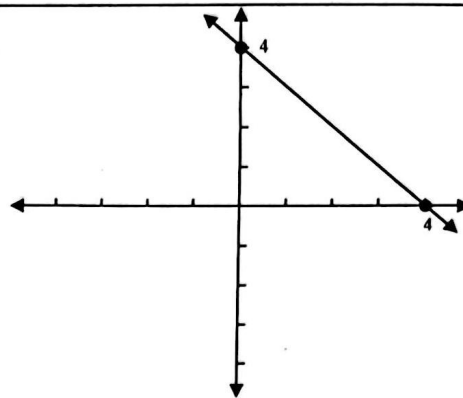
RESPUESTAS

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $I_x\left(0, \frac{3}{5}\right), I_y\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ | 3. $I_x\left(0, \frac{1}{3}\right), I_y\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ | 5. $I_x\left(0, -\frac{4}{3}\right), I_y(2, 0)$ |
| 7. $I_x\left(0, -\frac{3}{2}\right), I_y(4, 0)$ | 9. $I_x(0, 5), I_y\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ | 11. $I_x\left(0, -\frac{8}{5}\right), I_y\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ |
| 13. $m = -2$ | 15. $m = 0$ | 17. No definida. |
| 19. $m = \frac{4}{5}$ | 21. $m = -2$ | |

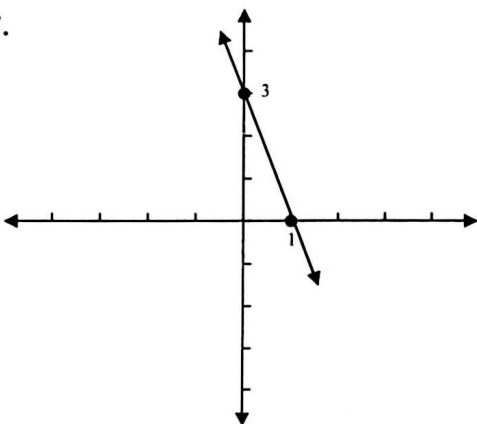
23.



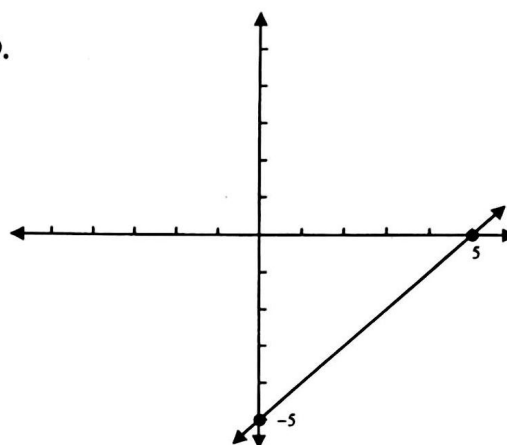
25.



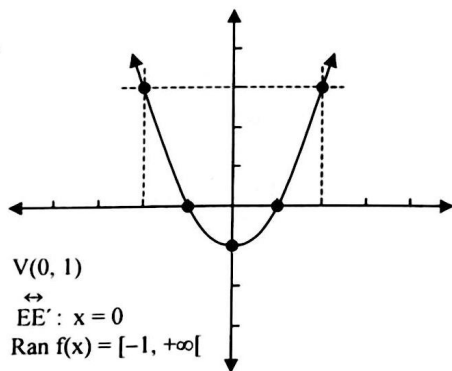
27.



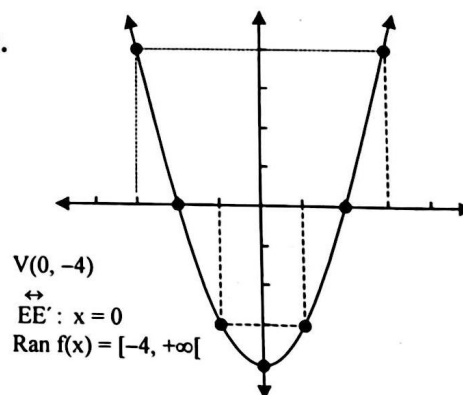
29.



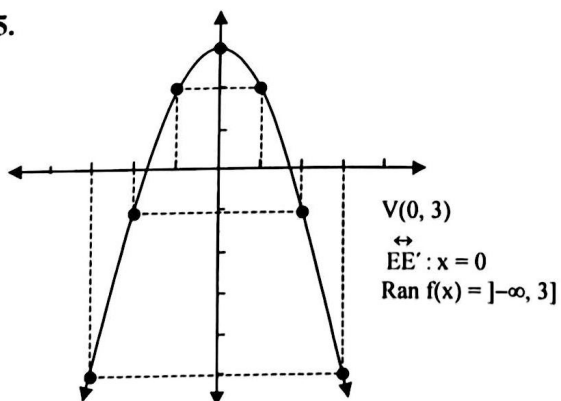
31.



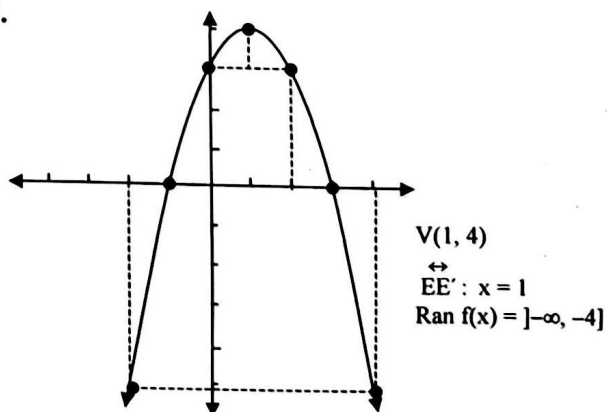
33.



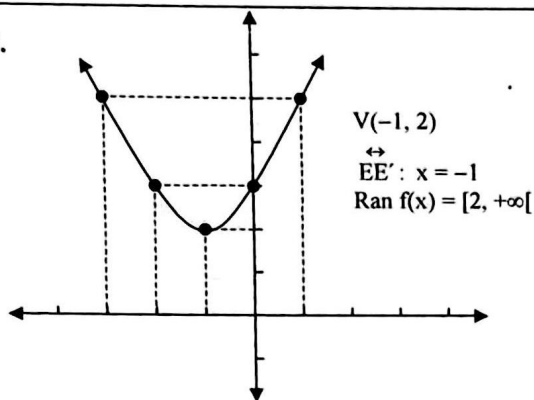
35.



37.



39.



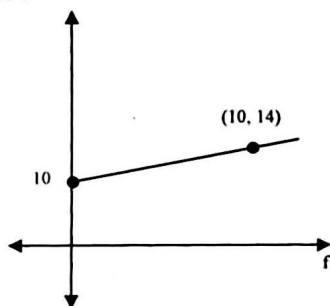
41. a) $y = -4x + 7$ b) $4x + y - 7 = 0$

43. a) $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$ b) $x - 3y - 11 = 0$

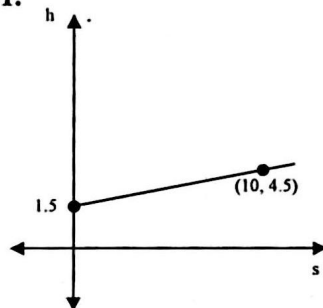
45. a) $y = 3x + 5$ b) $3x - y + 5 = 0$

47. a) $y = -\frac{5}{2}x - 18$ b) $2y + 5x + 36 = 0$

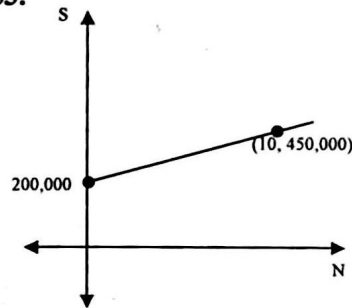
49.



51.



53.



55. $d(P_1, P_2) = 5$; $M\left(3, -\frac{3}{2}\right)$

57. $d(P_1, P_2) = \sqrt{85}$, $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

59. $d(P_1, P_2) = \sqrt{20}$; $M(5, -1)$

61. $d(P_1, P_2) = 2.625$; $M(1.05, 0.7)$

63. $d(P_1, P_2) = \sqrt{a^2 + b^2}$; $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

65. $d(A, B) = \sqrt{13}$, $d(B, C) = \sqrt{13}$, $d(A, C) = \sqrt{26}$; $(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$; Si es triángulo rectángulo

67. $d(A, B) = \sqrt{130}$, $d(B, C) = \sqrt{26}$, $d(A, C) = \sqrt{104}$; $(\sqrt{26})^2 + (\sqrt{104})^2 = (\sqrt{130})^2$; Si es triángulo rect.

69. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4y = 0$

71. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

73. $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$

75. $C(-1, 1)$; $r = 5$; $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$; $x^2 + y^2$

77. $C(1, 2)$; $r = \sqrt{34}$; $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 34$; $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$

79. $C(6, -1)$; $r = \sqrt{40}$; $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 40$; $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 3 = 0$

 *

UNIDAD 6. ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES

6.1. ECUACIONES EN DOS VARIABLES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Establecer procedimientos para formular una ecuación lineal en dos variables.
- ♦ Interpretar correctamente la formulación algebraica de una ecuación lineal en dos variables.
- ♦ Traducir al lenguaje algebraico una expresión dada en lenguaje corriente que involucre una ecuación lineal en dos variables.
- ♦ Resolver problemas con aplicación de fórmulas de ecuaciones lineales en dos variables.

Considerando un enunciado compuesto que lleve como conector la conjunción “y”. ¿Qué pares ordenados son los elementos del C.S. del enunciado abierto compuesto?:

$$x + 2y - 5 = 0 \quad \text{“y”} \quad 2x + y - 1 = 0$$

Obsérvese que el par ordenado $(-1, 3)$ satisface ambas cláusulas, así: si se sustituye $x = -1$, $y = 3$ en este enunciado se tiene:

$x + 2y - 5 = 0$	y	$2x + y - 1 = 0$
$-1 + 2(3) - 5 = 0$	y	$2(-1) + 3 - 1 = 0$
$-1 + 6 - 5 = 0$	y	$-2 + 3 - 1 = 0$
$5 - 5 = 0$	y	$-3 + 3 = 0$
$0 = 0$	y	$0 = 0$

De lo anterior se tiene que: el C.S. del enunciado compuesto es la pareja ordenada $(-1, 3)$. La gráfica del conjunto solución del enunciado, es la intersección del par de rectas que representa el sistema. El tipo de enunciado abierto que lleva el conector “y”, tiene como C.S. una pareja ordenada y frecuentemente se escriben así:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{C.S.} = \{(x, y)\}$$

y se le llama **sistema de ecuaciones lineales en dos variables**.

Cuando se hable del Conjunto Solución (C.S.) de un sistema de ecuaciones simultáneas, se refiere al conjunto de elementos comunes (**pares ordenados**) a los conjuntos soluciones de cada enunciado abierto. El proceso de encontrar esos valores o soluciones de un sistema, se conoce con el nombre de **resolver simultáneamente un sistema de ecuaciones lineales en dos variables**.

DEFINICION: Una expresión general de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, viene dado por:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; & a_1 \neq 0 \text{ ó } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0; & a_2 \neq 0 \text{ ó } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplos de este sistema son:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2x = y + 5 \\ 2x = -4y + 8 \end{cases}$
--	---	---

Para resolver un sistema simultáneo se usan entre otros, los métodos.

- | | | |
|---------------|----------------|------------------|
| 1. Gráfico | 2. Eliminación | 3. Sustitución |
| 4. Igualación | 5. Matrices | 6. Determinantes |

El método gráfico es muy poco usado por las limitaciones que ofrece, sin embargo se hará uso de él para ofrecer ciertas explicaciones que facilitarán la interpretación de algunos conceptos.

IMPORTANTE:



Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, está escrito en su *forma estándar*, cuando cada ecuación que lo forma, tienen en un mismo miembro, los términos en la variable x , en la variable y y el término constante, mientras que el otro miembro es cero.

Los siguientes sistemas, están escritos en su Forma Estándar:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 3x - 5y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -3x + 2y + 4 = 0 \\ 5x - 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

Ya se sabe que cada ecuación lineal en dos variables, tiene asociada una línea recta; por tanto, un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables tiene asociado, dos líneas rectas. Para graficar la línea recta asociada a cada ecuación de un sistema, se hacen los siguientes pasos:

- P.1. Se realizan las operaciones indicadas (si las hay) y se escribe el sistema en su forma estándar.
- P.2. Se despeja la variable “ y ” de cada ecuación del sistema.
- P.3. Se le asignan valores a la variable “ x ” y se calculan los correspondientes a la variable “ y ”, en caso que se desee, usar los intersecciones en cada eje.
- P.4. Los pares de valores (x, y) calculados en el paso anterior, se registran en una tabla de valores; una para cada ecuación.
- P.5. Se traza un sistema de ejes coordenados o cartesianos, se grafica cada punto definido en la tabla de valores y se traza la línea recta correspondiente. Habrá una línea por cada ecuación del sistema.

Ejemplos: Trazar las líneas correspondientes a cada uno de los siguientes sistemas:

$$1. \begin{cases} 3x + y = 7 : \vec{L}_1 \\ 2x - 3y = 1 : \vec{L}_2 \end{cases}$$

Solución:

$$y = 7 - 3x : \vec{L}_1$$

$$-3y = 1 - 2x : \vec{L}_2$$

$$3y = 2x - 1$$

$$y = \frac{2x - 1}{3}$$

... P.2. Despejando y de cada ecuación.

Si $x = 1$ entonces $y = 7 - 3(1) = 4 : \vec{L}_1$

$x = 2$ entonces $y = 7 - 3(2) = 1$

$x = 3$ entonces $y = 7 - 3(3) = -2$

Si $x = -4$ entonces $y = \frac{2(-4) - 1}{3} = -3 : \vec{L}_2$

$x = -1$ entonces $y = \frac{2(-1) - 1}{3} = -1$

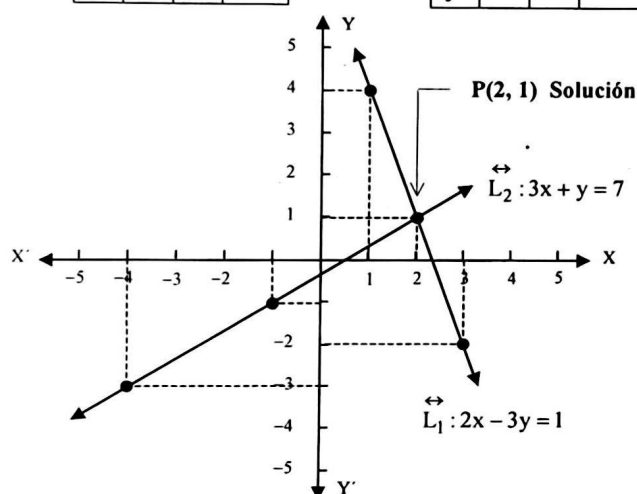
$x = 2$ entonces $y = \frac{2(2) - 1}{3} = 1$

$\vec{L}_1$

$\vec{L}_2$

x	1	2	3
y	4	1	-2

x	-4	-1	2
y	-3	-1	1



... P.3. Asignando valores a x para calcular los de y en la primera ecuación.

... P.3. Haciendo lo mismo para la segunda ecuación.

... P.4. Escribiendo en una tabla los pares de valores (x, y) calculados, para cada ecuación del sistema.

... P.5. Trazando las gráficas de cada ecuación del sistema.

En la gráfica del sistema anterior, se puede notar que las dos rectas $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ se intersectan en un punto P. La pareja de números asociada al punto de intersección P, está en cada una de las tablas de valores; dicho en otras palabras, es la única pareja que satisface simultáneamente a ambas ecuaciones. El punto de intersección P corresponde al **conjunto solución del sistema**. Luego C.S. = $\{(2, 1)\}$.

Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, que tiene exactamente un par ordenado como solución, se llama **consistente – independiente** o **compatible**.

$$2. \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 : \vec{L}_1 \\ 2x + y - 2 = 0 : \vec{L}_2 \end{cases}$$

Solución:

$y = -2x + 4 : \vec{L}_1$

$y = -2x + 2 : \vec{L}_2$

... P.2. Despejando y de cada ecuación.

Si $x = 0$ entonces $y = -2(0) + 4 = 4 : \vec{L}_1$
 $x = 1$ entonces $y = -2(1) + 4 = 2$
 $x = 2$ entonces $y = -2(2) + 4 = 0$

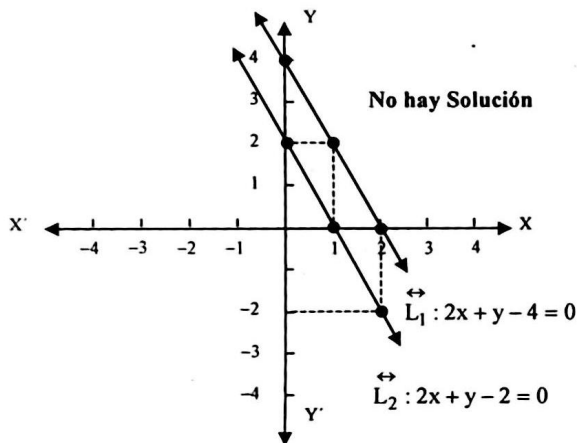
Si $x = 0$ entonces $y = -2(2) + 2 = 2 : \vec{L}_2$
 $x = 1$ entonces $y = -2(2) + 2 = 0$
 $x = -2$ entonces $y = -2(-2) + 2 = -2$

$$\vec{L}_1$$

x	0	1	2
y	4	2	0

$$\vec{L}_2$$

x	0	1	2
y	2	0	-2



... P.3. Asignando valores a x para calcular los de y en la primera ecuación.

... Haciendo lo mismo para la segunda ecuación.

... P.4. Escribiendo en una tabla los pares de valores (x, y) calculados, para cada ecuación del sistema.

... P.5. Trazando la gráfica de cada ecuación en un mismo sistema de ejes

En la gráfica del sistema anterior, se puede apreciar que las dos rectas $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ no se intersectan; lo que quiere decir que **no existe solución**. Las dos rectas son paralelas y el C.S. = $\emptyset$.

Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, que no tiene solución se llama: **inconsistente** o **incompatible**.

3. $\begin{cases} 2x = -y + 5 : \vec{L}_1 \\ 2y = -4x + 10 : \vec{L}_2 \end{cases}$

Solución:

$y = -2x + 5 : \vec{L}_1$
 $y = \frac{-4x + 10}{2} : \vec{L}_2$

Si $x = 0$ entonces $y = -2(0) + 5 = 5 : \vec{L}_1$
 $x = 1$ entonces $y = -2(1) + 5 = 3$
 $x = 2$ entonces $y = -2(2) + 5 = 1$

... ¿Qué se hizo?

... ¿Qué se hizo?

Si $x = 0$ entonces $y = \frac{-4(0) + 10}{2} = 5 : \overleftrightarrow{L_2}$... ¿Qué se hizo?

$x = 1$ entonces $y = \frac{-4(1) + 10}{2} = 3$

$x = 2$ entonces $y = \frac{-4(2) + 10}{2} = 1$

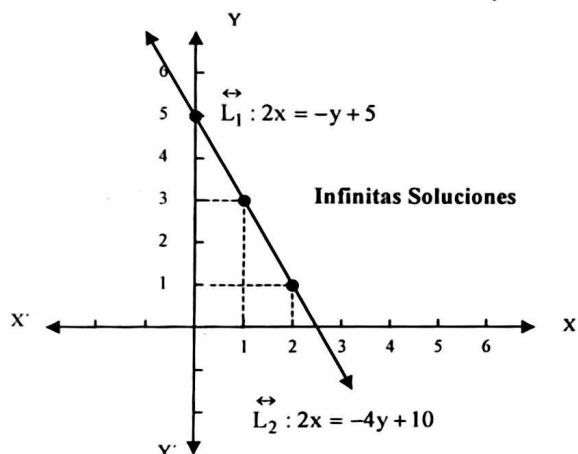
$\overleftrightarrow{L_1}$

x	0	1	2
y	5	3	1

$\overleftrightarrow{L_2}$

x	0	1	2
y	5	3	1

... ¿Qué se hizo?



... ¿Qué se hizo?

Es importante recordar, que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Las gráficas de las ecuaciones de este sistema coinciden en todos sus puntos y la intersección de ellas, es a todo lo largo de la misma recta, lo que quiere decir que el sistema **tiene infinitas soluciones**.

Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, que tienen infinitas soluciones se llama **consistente – dependiente o indeterminado**.

Ya se dijo antes, que la gráfica de cada ecuación del sistema es una línea recta. Se deduce que debe ocurrir exactamente **una** de las tres posibilidades que se enuncian a continuación, cuando se resuelve un sistema:

1. Las rectas se cortan en un solo punto.
2. Las rectas son paralelas.
3. Las rectas coinciden y son idénticas.

Como los pares ordenados que son soluciones, dan las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de dos ecuaciones, se puede entonces interpretar los enunciados anteriores de la siguiente manera:

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones.

A continuación se presenta la formulación verbal de algunos problemas. Se pide a) Identificar las variables que intervienen en él; b) Formular o escribir una ecuación algebraica en dos variables que define el problema; c) Trazar la gráfica correspondiente de la ecuación formulada, para valores que se quieran para la variable x .

1. En un concentrado se mezcla sorgo con maíz tal que el doble del peso del maíz y el triple del peso del sorgo es igual a 100 lbs.

Solución:

- | | |
|--|---|
| a) Sea x = peso del maíz.
y = peso del sorgo. | ... Identificación de variables.
... Resp. |
| b) $2x$ = doble del peso del maíz.
$3y$ = triple del peso del sorgo.

$2x + 3y = 100$ | ... Formulando la ecuación respectiva.

... Resp. |
| c) La gráfica hágala ud. en papel cuadriculado | ... Resp. |

2. Un hacendado compró el triple de vacas que de caballos. Entre ambos tiene 80.

Solución:

- | | |
|---|---|
| a) Sea x = número de caballos.
y = número de vacas. | ... Identificación de variables.
... Resp. |
| b) x = número de caballos.
$3y$ = triple del número de vacas.

$x + 3y = 80$ | ... Formulando la ecuación.

... Resp. |
| c) La gráfica hágala ud. en papel cuadriculado | ... Resp. |

3. Si a 5 veces el mayor de dos números se le resta el doble del menor el resultado es 16.

Solución:

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) Sea x = número mayor.
y = número menor. | ... ¿Qué se hizo? |
| b) $5x$ = cinco veces el número mayor.
$2y$ = doble del número menor.

$5x - 2y = 16$ | ... ¿Qué se hizo?

... Resp. |
| c) La gráfica hágala ud. en papel cuadriculado | ... Resp. |

GUIA DE ESTUDIO No. 32

En cada uno de los siguientes enunciados: **a)** Identificar las variables; **b)** Escribir la ecuación respectiva en dos variables; **c)** Graficar la ecuación, para valores de x que se estimen convenientes. Hágala en papel cuadriculado.

1. El doble del líquido A se mezcla con el cuádruplo del líquido B, ambos dan 24 galones de solución.
2. Un agricultor compró el doble de semilla de frijol que de maíz. Entre ambas compró 112 lbs.
3. 6 lbs. de café y 5 de azúcar cuestan L. 30.00.
4. En un circo 2 entradas para adulto y 3 para niños cuestan L. 35.00.
5. Si al doble del número mayor se le resta el triplo del menor, el resultado es 4.
6. La suma de las cifras de las unidades y de las decenas es 15.
7. El doble de un número supera en 9 al triplo de otro.
8. El triplo de un número supera en 1 al cuádruplo de otro.
9. Si $1/4$ de un número se suma a $1/3$ de otro, el resultado es 9.
10. Un químico tiene dos soluciones ácidas, una que contiene 10% de ácido y la otra 4% en una solución de 200 litros.

6.2. SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES. MÉTODO DE REDUCCION, ELIMINACION O DE ADICIÓN Y SUSTRACCION. APLICACIONES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Establecer un método analítico para resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos variables.
- ♦ Comprender los procedimientos del método de reducción, eliminación o de adición y sustracción, para resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos variables.
- ♦ Resolver problemas con aplicación de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos variables por cualquier método, es más que determinar su Conjunto Solución, el que podrá contener: *una* o *ninguna* o *infinitas* parejas ordenadas como solución. En la solución de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables, es útil recordar que las siguientes transformaciones, no alteran el proceso de solución:

1. Intercambiar la posición de cualquiera de las dos ecuaciones.
2. Multiplicar por un mismo número real distinto de cero, ambos lados de una ecuación del sistema.

PASOS PARA LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES. MÉTODO DE REDUCCION, ELIMINACION O ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

- P.1.** Efectuar operaciones indicadas, si las hay, y escribir cada ecuación del sistema en su forma estándar o equivalente.
- P.2.** Seleccionar una de las dos variables a eliminar y multiplicar, cuando sea necesario, cada ecuación por una constante real diferente de cero, de tal manera que la variable quede con el mismo coeficiente pero con signos opuestos.
- P.3.** Sumar ambas ecuaciones y resolver para la variable que queda.
- P.4.** Sustituir en **P.1.** el valor encontrado para la variable y resolver la ecuación resultante para la variable.
- P.5.** Hacer la comprobación en cualquiera de las ecuaciones de **P.1.** con los valores encontrados de las dos variables. Debe haber una igualdad.
- P.6.** Determinar el C.S.

Ejemplos: Determinar el C.S. de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1. \begin{cases} -3y = 24 - 4x \\ 3x = 1 - 2y \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 9y = 72 \\ -12x - 8y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 12x - 9y = 72 \\ -12x - 8y = -4 \\ \hline -17y = 68 \\ y = \frac{68}{-17} \\ y = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 2(-4) = 1 \\ 3x - 8 = 1 \\ 3x = 1 + 8 \\ 3x = 9 \\ x = \frac{9}{3} \\ x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4(3) - 3(-4) = 24 \\ 12 + 12 = 24 \\ 24 = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{C.S.} = \{(3, -4)\} \\ \text{C.S.} = \{(3, -4)\} \end{array}$$

Se cumple

... P.1. Escribiendo cada ecuación en su forma estándar o equivalente.

... P.2. Seleccionando para eliminar a la variable x , multiplicando por 3 a la primera ecuación y por -4 a la segunda para igualar los coeficientes de x .

... P.3. Sumando ambas ecuaciones y resolviendo para la variable y , o que es lo mismo que eliminar x .

... P.4. Sustituyendo el valor de y , en la 2ª ecuación del sistema y resolviendo para x .

... P.5. Haciendo la comprobación en la 1ª ecuación del sistema con los valores encontrados para las variables.

... P.6. Determinando el C.S.
... **Resp.**

$$2. \begin{cases} 3x - 2(y + 7) = 2 \\ 4(x + 6) + 7y = 26 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 14 = 2 \\ 4x + 7y + 24 = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 + 14 \\ 4x + 7y = 26 - 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 21x - 14y = 112 \\ 8x + 14y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21x - 14y = 112 \\ 8x + 14y = 4 \\ \hline 29x = 116 \\ x = \frac{116}{29} \\ y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4(4) + 7y = 2 \\ 16 + 7y = 2 \\ 7y = 2 - 16 \\ 7y = -14 \\ y = \frac{-14}{7} \\ y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(4) - 2(-2) = 16 \\ 12 + 4 = 24 \\ 16 = 16 \end{array}$$

Se cumple

$$C.S. = \{(4, -2)\}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 6x + 4y = -4 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = -4 \\ -6x - 4y = 4 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

... P.1. Efectuando operaciones y escribiendo cada ecuación en su forma estándar o equivalente.

... Sistema equivalente al sistema dado.

... P.2. Eliminando la variable y multiplicando la 1ª ecuación por 7 y la 2ª por 2 para igualar los coeficientes de y .

... P.3. Sumando ambas ecuaciones y resolviendo para x , o que es lo mismo, eliminar y .

... P.4. ¿Qué se hizo?

... P.5. Haciendo la comprobación en la 1ª ecuación del sistema equivalente.

... P.6.

... Resp.

... P.2. ¿Qué se hizo?

... P.3. ¿Qué se hizo?

En este sistema el $0 = 0$ significa que el sistema tiene infinitas soluciones y se la llama **Tautología**.
¿Cuál será el C.S.?

$$4. \begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ 2x = y + 8 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

... ¿Qué se hizo?

$$\begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ -4x + 2y = -16 \end{cases}$$

... ¿Qué se hizo?

$$\begin{array}{r} 4x - 2y = -3 \\ -4x + 2y = -16 \\ \hline 0 = -19 \end{array}$$

... ¿Qué se hizo?

En este sistema el $0 = -19$ significa que el sistema no tiene soluciones y se le llama **Contradicción** y el conjunto solución es vacío, C.S. = $\emptyset$

5. El doble de un número supera en 9 al triple de otro, mientras que 12 veces el segundo excede en 12 unidades al séptuplo del primero. Hallar ambos números.

Solución:

Sea $x =$ primer número;
 $y =$ segundo número;

$2x =$ doble del primero;
 $3y =$ triple del Segundo;

$7x =$ séptuplo del primero.
 $12y =$ 12 veces el segundo.

$$\begin{array}{l} 2x = 3y + 9 \quad \text{ó} \quad 2x - 3y = 9 \\ 12y = 7x + 12 \quad \quad \quad 7x - 12y = -12 \end{array}$$

... Formando las ecuaciones del sistema, de acuerdo con el problema. ¡¡Resuélvalo Ud.!!

Los Números son: 48 y 29

... Resp.

¡¡Compruébelo Ud.!!

*

GUIA DE ESTUDIO No. 33

Determinar el C.S. de los sistemas de ecuaciones lineales. Método de Reducción:

$$1. \begin{cases} x + 4y = 5 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 4y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 3x + 2y = -7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 27 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - 2y = -12 \\ 6x + y = 19 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x + y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
 10. \begin{cases} 3x + 2(y - 3) = 2y \\ 2x - (y + 2x) = 4 \end{cases} & 11. \begin{cases} 2(x - 3y) + 3(2y - 4) = 0 \\ 4(x - 1) - (4x - y) = 3 \end{cases} & 12. \begin{cases} 4(x + 1) - 3(y + 2) = 3 \\ 5x + 4(y - 3) = -9 \end{cases} \\
 13. \begin{cases} 2(3x - 4) + 3(2y - 7) = -35 \\ 2x - (3y + x) = 7 \end{cases} & 14. \begin{cases} 3x - 2(2y + 3) = 4 \\ 7(x - y) + 2(x + 4y) = 17 \end{cases} & 15. \begin{cases} 3(x - 2y) + 2(x + 3) = 4 \\ 4(x + y) - 3(x + 2y) = -2 \end{cases} \\
 16. \begin{cases} 3(2x + y) - 2(x - 2y) = 26 \\ 2(x - y) = 3(2x + y) - 22 \end{cases} & 17. \begin{cases} 5(4x + y) - (x - 3y) = -5 \\ 2(x - 2y) + (2x - y) = 19 \end{cases} & 18. \begin{cases} 3(2x - y) - (x - y) = -6 \\ 5(3x - 2y) + (x - 2y) = -8 \end{cases}
 \end{array}$$

Resolver los siguientes problemas:

19. La suma de dos números es 12 y su diferencia es 4. Hallar los números.
20. La suma de dos corrientes eléctricas es 15.7 amperios y su diferencia es 3.3 amperios. Encontrar el valor de las corrientes.
21. La suma de dos números es 30. El mayor tiene 4 unidades más que el menor. Obtener esos números.
22. El doble de un número es una unidad menor que el triplo de otro. Cinco veces el primero número es una unidad mayor que siete veces el segundo. Hallar esos números.
23. El triplo de un número es dos unidades menor que otro. Siete veces el primer número es una unidad mayor que el doble del segundo.
24. La suma de dos números es 92. Un octavo del primero más un tercio del segundo es 19. Hallar los números.
25. La suma del largo y el ancho de un rectángulo es 19 pulgadas. El largo es una unidad menor que el doble del ancho. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.
26. El perímetro de un rectángulo es de 48 m. Su ancho es dos veces mayor que la mitad del largo. Encontrar sus dimensiones.
27. Dos ángulos son complementarios. Su diferencia es 14° . Encontrar los ángulos.
28. Dos ángulos son suplementarios y un ángulo es 14° mayor que el otro. Hallar el valor de esos ángulos.

6.3. MÉTODO DE SUSTITUCION

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Aplicar los pasos en la solución analítica de un sistema de ecuaciones simultáneas de dos ecuaciones con dos variables, utilizando el método de sustitución.
- ♦ Resolver un sistema simultáneo de dos ecuaciones lineales con dos variables, por el método de sustitución.

Este es otro de los métodos analíticos que se puede utilizar para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Se dan a continuación los pasos de este método.

- P.1. Efectuar las operaciones indicadas si las hay y escribir cada ecuación del sistema en su forma estándar.
- P.2. Elegir una de las ecuaciones y despejar en ella una de las variables en términos de la otra.
- P.3. Sustituir lo obtenido en el P.2. en la otra ecuación para obtener una ecuación en una sola variable.
- P.4. Resolver la ecuación obtenida en el P.3.
- P.5. Sustituir el valor de la variable encontrado en el P.4., en una cualesquiera de las ecuaciones originales, para calcular el valor de la otra variable.
- P.6. Realizar la comprobación en cualesquiera de las ecuaciones originales con los valores encontrados de las dos variables.
- P.7. Escribir el C.S.

Ejemplos. Determinar el C.S. de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, por el método de *sustitución*.

$$1. \begin{cases} -3y = 24 - 4x \\ 3x = 1 - 2y \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 24 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

... P.1. Escribiendo cada ecuación en su forma estándar.

$$2y = 1 - 3x$$

... P.2. Eligiendo la segunda ecuación para despejar y .

$$y = \frac{1 - 3x}{2}$$

$$4x - 3\left(\frac{1 - 3x}{2}\right) - 24 = 0$$

... P.3. y P.4. Sustituyendo en la primera ecuación el valor de y encontrado en P.2. y resolviendo.

$$4x - \frac{3 - 9x}{2} = 24$$

$$8x - (3 - 9x) = 48$$

... ¿Qué se hizo?

$$17x = 48 + 3$$

$$17x = 51$$

$$x = \frac{51}{17} = 3$$

... Valor de la variable x .

$$x = 3$$

$$3(3) + 2(y) = 1$$

$$9 + 2y = 1$$

$$2y = 1 - 9$$

$$2y = -8$$

$$y = \frac{-8}{2} = -4$$

Si $x = 3$, $y = -4$ entonces:

$$-3(-4) = 24 - 4(3)$$

$$12 = 24 - 12$$

$$12 = 12 \quad \text{Se cumple}$$

$$C.S = \{(3, -4)\}$$

... P.5. Sustituyendo $x = 3$ en la segunda ecuación y resolviendo para y .

... P.6. Realizando la comprobación en la primera ecuación original.

... P.7.

... Resp.

$$2. \begin{cases} 3x - 2(y + 7) = 2 \\ 4(x + 6) + 7y = 26 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 14 = 2 \\ 4x + 24 + 7y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 16 = 0 \\ 4x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3x = 2y + 16$$

$$x = \frac{2y + 16}{3}$$

$$4\left(\frac{2y + 16}{3}\right) + 7y - 2 = 0$$

$$\frac{8y + 64}{3} + 7y = 2$$

$$8y + 64 + 21y = 6$$

$$29y = 6 - 64$$

$$29y = -58$$

$$y = \frac{-58}{29} = -2$$

$$y = -2$$

$$3x - 2(-2) - 16 = 0$$

$$3x = 16 - 4$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = 4$$

Si $x = 4$, $y = -2$, entonces:

$$3(4) - 2(-2 + 7) = 2$$

$$12 - 2(5) = 2$$

$$12 - 10 = 2$$

$$2 = 2$$

$$C.S. = \{(4, -2)\}$$

Se cumple

... P.1. Efectuando operaciones indicadas y escribiendo cada ecuación en su forma estándar.

... P.2. Seleccionando la primera ecuación y despejando x .

... P.3. y P.4. Sustituyendo en la segunda ecuación del P.1. el valor de x encontrado en P.2. y despejando para y .

... Valor de la variable y .

... P.5. Sustituyendo $y = -2$ en la primera ecuación del P.1. y resolviendo para x .

... P.6. Realizando la comprobación en la primera ecuación original.

... P.7.

... Resp.

6.4. MÉTODO DE IGUALACION

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Aplicar los pasos en la solución analítica de un sistema de dos ecuaciones con dos variables, utilizando el método de igualación.
- ♦ Resolver un sistema simultáneo de dos ecuaciones lineales con dos variables por el método de sustitución.

Los pasos a seguir para resolver por el método de igualación un sistema simultáneo de ecuaciones lineales en dos variables, se resumen a continuación:

- P.1. Efectuar las operaciones indicadas si las hay, y escribir cada ecuación del sistema en su forma estándar.
- P.2. Elegir una de las variables en cada ecuación y despejar en ellas la variable seleccionada. (La misma en ambas ecuaciones).
- P.3. Igualar ambos despejes obtenidos en el P.2. y resolver la ecuación resultante para la variable que queda.
- P.4. Sustituir el valor de la variable encontrada en P.3., en una cualesquiera de las ecuaciones del sistema original y calcular el valor de la otra variable.
- P.5. Realizar la comprobación en cualesquiera de las ecuaciones originales con los valores encontrados de las dos variables.
- P.6. Escribir el C.S.

Ejemplos. Determinar el C.S de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, por el método de *igualación*.

$$1. \begin{cases} -3y = 24 - 4x \\ 3x = 1 - 2y \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 24 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4x = 3y + 24$$

$$x = \frac{3y + 24}{4}$$

$$3x = 1 - 2y$$

$$x = \frac{1 - 2y}{3}$$

$$\frac{3y + 24}{4} = \frac{1 - 2y}{3}$$

$$3(3y + 24) = 4(1 - 2y)$$

$$9y + 72 = 4 - 8y$$

$$9y + 8y = 4 - 72$$

$$17y = -68$$

$$y = \frac{-68}{17} = -4$$

$$y = -4$$

... P.1. Escribiendo cada ecuación en su forma estándar. No hay operaciones indicadas.

... P.2. Seleccionando la variable x de cada ecuación y despejándola.

... P.3. Igualando ambos despejes obtenidos en P.2., resolviendo para la variable que queda y , y operando.

$$\begin{aligned} -3y &= 24 - 4x \\ -3(-4) &= 24 - 4x \\ 12 &= 24 - 4x \\ 4x &= 24 - 12 \\ 4x &= 12 \end{aligned}$$

$$x = \frac{12}{4} = 3$$

$$x = 3$$

Si $x = 3$, $y = -4$ entonces:

$$3(3) = 1 - 2(-4)$$

$$9 = 1 + 8$$

$$9 = 9$$

$$\text{C.S.} = \{(3, -4)\}$$

Se cumple

... P.4. Sustituyendo en la primera ecuación original del sistema, el valor encontrado para la variable y , y despejando para x .

... P.5. Sustituyendo valores en la segunda ecuación original del sistema y operando para hacer la comprobación.

... P.6.

... Resp.

$$2. \begin{cases} 3x - 2(y + 7) = 2 \\ 4(x + 6) + 7y = 26 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 14 = 2 \\ 4x + 24 + 7y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 16 = 0 \\ 4x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$-2y = 16 - 3x$$

$$y = \frac{16 - 3x}{-2}$$

$$7y = 2 - 4x$$

$$y = \frac{2 - 4x}{7}$$

$$\frac{16 - 3x}{-2} = \frac{2 - 4x}{7}$$

$$7(16 - 3x) = -2(2 - 4x)$$

$$112 - 21x = -4 + 8x$$

$$-21x - 8x = -4 - 112$$

$$-29x = -116$$

$$x = \frac{-116}{-29} = 4$$

$$x = 4$$

$$4(4 + 6) + 7y = 26$$

$$40 + 7y = 26$$

$$7y = 26 - 40$$

$$7y = -14$$

$$y = \frac{-14}{7} = -2$$

$$y = -2$$

Si $x = 4$, $y = -2$, entonces:

$$3(4) - 2(-2 + 7) = 2$$

$$12 - 2(5) = 2$$

$$2 = 2$$

Se cumple

$$\text{C.S.} = \{(4, -2)\}$$

... P.1. ¿Qué se hizo?

... P.2. ¿Qué se hizo?

... P.3. ¿Qué se hizo?

... P.4. ¿Qué se hizo?

... P.5. ¿Qué se hizo?

... P.6.

... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 34

Determinar el C.S. de los sistemas de ecuaciones lineales. Método de Reducción:

$$1. \begin{cases} 3x + 14y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 6x + y = -1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 5x - 11y = 9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ 4x - 5y = -3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 7x - 5y = -5 \\ 9x - 8y = -19 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - y = -9 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - 4y = 17 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3(2x - y) - (x - y) = -6 \\ 5(3x - 2y) + (x - 2y) = -8 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 5(4x + y) - (x - 3y) = -5 \\ 2(x - 2y) + (2x - y) = 19 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3(x + y) - 2(2x - y) = 7 \\ 4(x - 2y) + 3(x + 3y) = -13 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2(x + y) - (x + 3y) = -1 \\ 5(2x - 3y) + 2(3x + y) = -1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{10} \\ \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y = 3 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = 13 \\ \frac{1}{4}x - \frac{7}{8}y = -3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{3}{8}x - \frac{4}{3}y = \frac{9}{4} \\ \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = -4 \\ \frac{7}{8}x - \frac{1}{3}y = 3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{2x + y}{3} + \frac{3x + y}{2} = \frac{11}{6} \\ \frac{3x - 5y}{7} - \frac{2x - y}{6} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{8} = 11 \\ \frac{x + y}{3} + \frac{x + y}{4} = 10 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{3y + 2x}{5} + \frac{y + 6}{7} = 2 \\ \frac{2x - 5y}{3} + \frac{x + 7}{4} = 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{5x + y}{3} + \frac{2x - y}{6} = \frac{3}{2} \\ \frac{x - 2y}{4} - \frac{3x - y}{3} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Sugerencia: Con los sistemas que tengan coeficientes fraccionarios, utilizar el m.c.m. de los denominadores para escribirlos en forma equivalente con coeficientes enteros.

22. resolver los ejercicios del No. 1 al No. 18 de la guía de estudio No. 33, utilizando el método de sustitución e igualación.

GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 6

Determinar el C.S. de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1. \begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ x - 3 = 3y - 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3(x + 2) = 2y \\ 2(y + 5) = 7x \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 1 = 2(y + 6) \\ x + 6 = 3(1 - 2y) \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 30 - (8 - x) = 2y + 30 \\ 5x - 29 = x - (5 - 4y) \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - (9x + y) = 5y - (2x + 9y) \\ 4x - (3y + 7) = 5y - 47 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (x - y) - (6x + 8y) = -(10x + 5y + 3) \\ (x + y) - (9y - 11x) = 2y - 2x \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5(x + 3) - (7x + 8y) = -6 \\ 7x - 9y - 2(x - 18y) = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2(x + 5) = 4(y - 4x) \\ 10(y - x) = 11y - 12x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x - 4y - 2(2x - 7) = 0 \\ 5(x - 1) - (2y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 12(x + 2y) - 8(2x + y) = 2(5x - 6y) \\ 20(x - 4y) = -10 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x(y - 2) - y(x - 3) = -14 \\ y(x - 6) - x(y + 9) = 54 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{2x + 3y}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{12} \\ \frac{x + y}{5} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{x + y}{3} + \frac{3x - y}{2} = \frac{7}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{3x + 5y}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{2y - x}{6} - \frac{4y + x}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{2x - 3y}{4} - \frac{4x + 3y}{3} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{3y + x}{7} - \frac{2y + x}{4} = \frac{5}{28} \\ \frac{3x + 2y}{5} - \frac{x - y}{6} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{x - 1}{2} - \frac{y + 1}{3} = -\frac{13}{36} \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y + 1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x - \frac{y - 3}{5} = 6 \\ 3y - \frac{x - 2}{7} = 9 \end{cases}$$

Resolver los siguientes problemas:

19. 6 libras de café y 5 libras de azúcar costaron L. 2.27 y 5 libras de café y 4 libras de azúcar a los mismos precios, costaron L. 1.88. Hallar el precio de una libra de café y una de azúcar.
20. El triple de un número supera en 1 al otro, mientras que el quintuplo del primero es 4 unidades menor que el doble del segundo. Encontrar ambos números.
21. La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia en 2. Hallar los números.
22. 5 trajes y 3 sombreros cuestan L. 4,180.00 y 8 trajes y 9 sombreros L. 6,940.00. Hallar el precio de un traje y un sombrero.
23. El triple de un número es 3 unidades menor que el doble de otro, mientras que el séxtuplo del primero supera en 5 al cuádruplo del segundo. Hallar los números.
24. En un cine, 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan L. 5.12 y 17 de niño y 15 de adulto cuestan L. 8.31. Hallar el precio de la entrada de un niño y la de un adulto.

RESPUESTAS

- | | | |
|---|----------------------|-------------------------|
| 1. C.S. = {(3, 4)} | 3. C.S. = {(4, 9)} | 5. C.S. = {(4, -2)} |
| 7. C.S. = {(5, 7)} | 9. C.S. = {(-1, -2)} | 11. C.S. = {(1/2, 1/4)} |
| 13. C.S. = {(5, -2)} | 15. C.S. = {(-3, 1)} | 17. C.S. = {(1/2, 4/3)} |
| 19. L. 0.32 el café y L. 0.07 el azúcar | 21. 104 y 8 | 23. 11 y 18 |

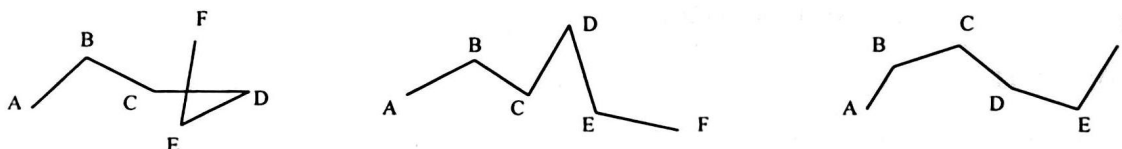
UNIDAD 7. POLIGONOS Y EL CÍRCULO

7.1. POLIGONOS Y SUS ELEMENTOS. CLASIFICACION. ANGULOS INTERNOS Y EXTERNOS

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

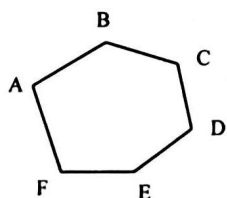
- ♦ Identificar una poligonal cerrada, una poligonal regular y un polígono.
- ♦ Reconocer un polígono convexo y uno cóncavo.
- ♦ Clasificar un polígono convexo por el número de lados.
- ♦ Identificar los elementos de un polígono regular, las diagonales, sus ángulos interiores y exteriores.
- ♦ Calcular la medida de un ángulo interno de un polígono regular, la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados y el número de triángulos que se forman con los lados y las diagonales.

Considerando los puntos A, B, C, D, E y F en un plano, unidos mediante segmentos A con B, B con C, C con D, D con E y E con F como se muestra abajo:

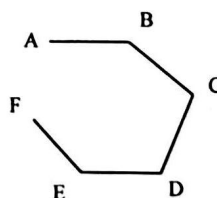


Las figuras anteriores están formadas por segmentos *concatenados* es decir, segmentos que no se encuentran sobre la misma recta. Cada una de esas líneas recibe el nombre de *línea poligonal*. Los puntos A, B, C, D, E y F reciben el nombre de *vértices* de la línea poligonal y los segmentos AB, BC, CD, DE, EF se llaman *lados* de la línea poligonal.

Si en las figuras anteriores se unen los puntos A y F se obtiene una *línea poligonal cerrada*.



Poligonal Cerrada



Poligonal Regular

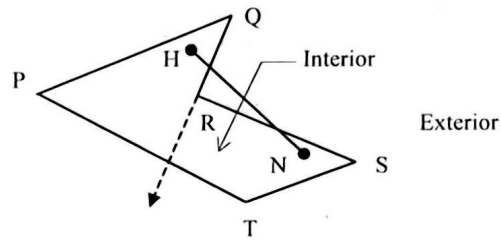
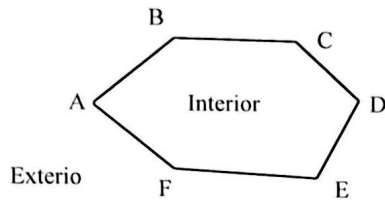
IMPORTANTE:



1. Para que exista una línea poligonal se necesitan tres o más puntos en el plano, de manera que tres de ellos no pertenezcan a la misma recta.
2. Si en una línea poligonal la medida de la longitud de sus lados es igual, entonces se dice que la línea poligonal es *regular*.

POLIGONO

Considérese las líneas poligonales cerradas cuyos lados no se entrecruzan como las figuras de abajo.



se observa que estas líneas poligonales cerradas dividen al plano en tres regiones:

1. El conjunto de los puntos interiores.
2. El conjunto de los puntos de la línea poligonal.
3. El conjunto de los puntos exteriores.

DEFINICION:

La unión de una línea poligonal cerrada y el conjunto de los puntos interiores en ella, se llama **polígono**.

IMPORTANTE:

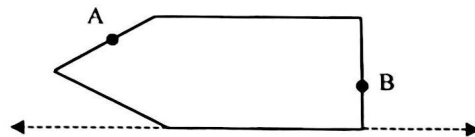
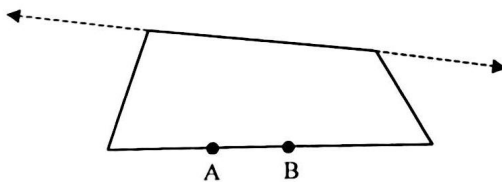


1. Los vértices y los lados de la línea poligonal cerrada son también del polígono.
2. A, B, C, D, E, F son los vértices del polígono.
3. AB, BC, CD, DE, EF son los lados del polígono.
4. Se dice que los vértices A, B y C, son consecutivos.
5. El conjunto de todos los lados de un polígono constituye su contorno o frontera.
6. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$ son los Ángulos internos del polígono.

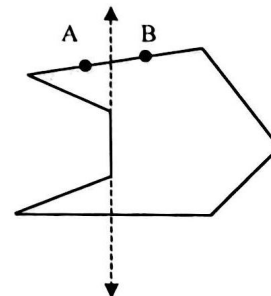
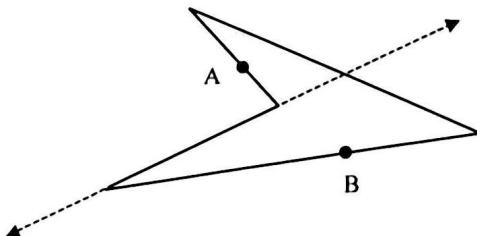
DEFINICION:

Un polígono es **convexo**, si ningún par de sus puntos está a los lados opuestos de una recta que contenga un lado del polígono, en caso contrario el polígono es **cóncavo**.

Los siguientes polígonos son convexos.

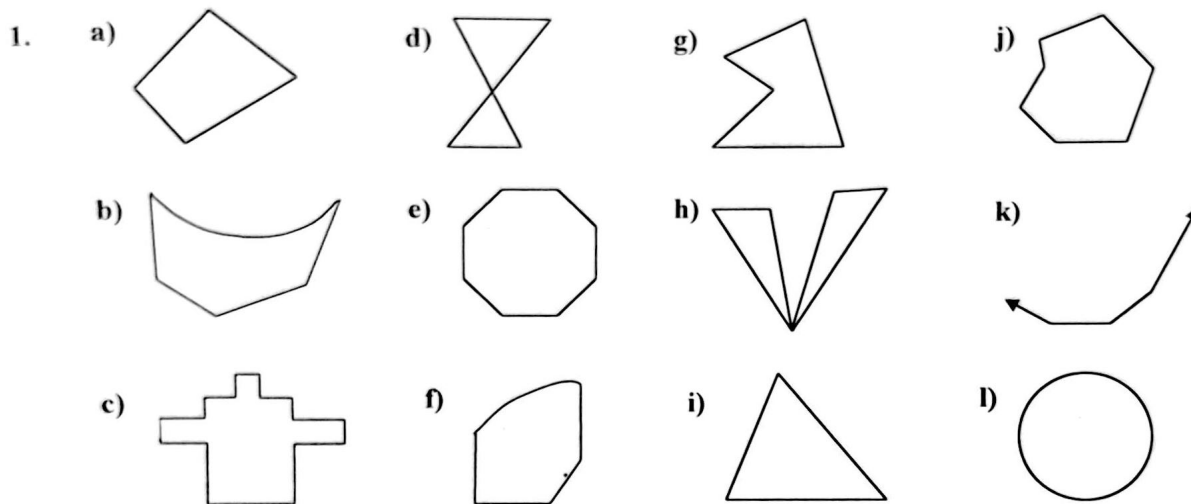


Los siguientes polígonos son cóncavos:



GUIA DE ESTUDIO No. 35

¿Cuáles de los siguientes dibujos representan polígonos? ¿Cuáles de los polígonos son convexos? ¿Cuáles son cóncavos?



2. Dibujar una línea poligonal cerrada que no determine un polígono.

3. Dibujar un polígono de 5 lados que sea convexo y uno de 6 lados que sea cóncavo.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas “V” y cuáles falsas “F”?

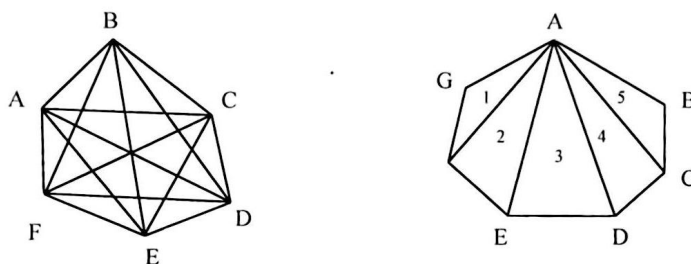
4. () Ningún triángulo es polígono.
5. () Todo polígono convexo es un conjunto convexo.
6. () Toda región poligonal es un conjunto convexo.
7. () El interior de un polígono convexo es un conjunto convexo.
8. () La unión de cualquier número de segmentos es un polígono.

CLASIFICACION DE LOS POLÍGONOS

A los polígonos convexos de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,... n lados se les dan nombres especiales de acuerdo al número de lados; así:

3 lados se llama: Triángulo	4 lados se llama: Cuadrilátero
5 lados se llama: Pentágono	6 lados se llama: Hexágono
7 lados se llama: Heptágono	8 lados se llama: Octágono
9 lados se llama: Eneágono	10 lados se llama: Decágono
11 lados se llama: Undecágono	12 lados se llama: Dodecágono
n lados se llama: n - abono	

En los polígonos convexos, los segmentos determinados por cada vértice con cada uno de los vértices no consecutivos, se denominan **diagonales**.



En la figura de la izquierda los vértices son: A, B, C, D, E y F, y las diagonales son AC, AD, AE, BF, BE, BD, CE, CF, CA. Este polígono es un hexágono.

En la figura de la derecha se ha dibujado un heptágono. Al trazar sus diagonales que tienen por vértice A, el heptágono quedó dividido en 5 triángulos.

IMPORTANTE:



1. Si por un vértice de un polígono de n lados, se trazan todas las diagonales, el polígono queda dividido en un número de triángulos igual número de lados menos dos: $(n - 2)$ triángulos.
2. Un polígono de n lados tiene n ángulos interiores.

DEFINICION:

Se llaman **polígonos regulares** a aquellos polígonos en que todos sus ángulos interiores son congruentes y todos sus lados también son congruentes.

IMPORTANTE:



1. Los ángulos interiores de un polígono regular, son congruentes.
2. Puesto que todos los ángulos de un polígono regular de n lados son congruentes, se sigue que cada ángulo tiene una medida en grados de:

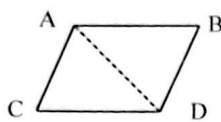
$$\hat{m} = \frac{(n - 2)}{n} (180^\circ)$$

3. La suma de los ángulos internos de un polígono regular de n lados viene dada en grados por

$$S = (n - 2) 180^\circ$$

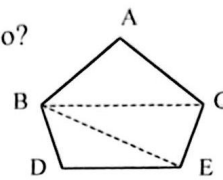
Ejemplo 1. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un mismo vértice de:

a) Un cuadrilátero?



1 diagonal ... Resp.

b) Un pentágono?



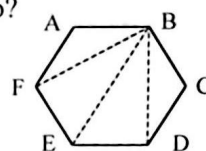
2 diagonales ... Resp.

c) Un triángulo?



Ninguna diagonal ... Resp.

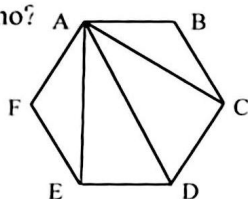
d) Un hexágono?



3 diagonales ... Resp.

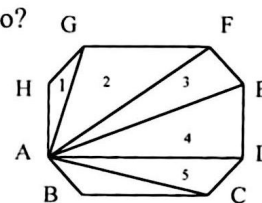
Ejemplo 2. ¿En cuántos triángulos queda dividido cada uno de los siguientes polígonos al trazar las diagonales a partir de un mismo vértice?

a) Un hexágono?



4 triángulos ... Resp.

b) Un octágono?



6 triángulos ... Resp.

Ejemplo 3. ¿Cuál es el valor de la suma de los ángulos interiores de:

a) Un triángulo?

Solución:

$(n - 2)180^\circ$	...	Fórmula dada	...
$n = 3$	...	Número de lados	...
$(3 - 2)180^\circ$	...	Sustituyendo	...
$1(180^\circ)$	...	Operando	...
180°	...	Resp.	...

b) Un pentágono?

Solución:

$(n - 2)180^\circ$
$n = 5$
$(5 - 2)180^\circ$
$3(180^\circ)$
540°

Ejemplo 4. ¿Cuál es la medida en grados de cada ángulo interno de:

a) Un pentágono regular?

Solución:

$\hat{m} = \frac{(n - 2)}{n} (180^\circ)$	...	Fórmula dada	...
---	-----	--------------	-----

b) Un cuadrado?

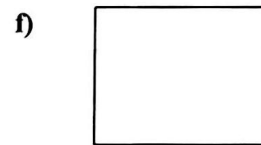
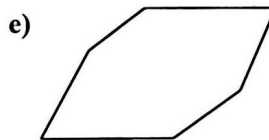
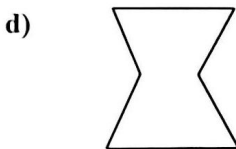
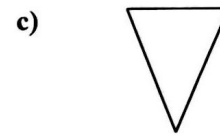
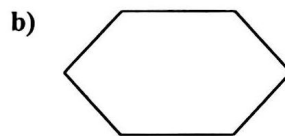
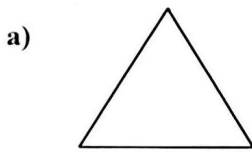
Solución:

$\hat{m} = \frac{(n - 2)}{n} (180^\circ)$

$n = 5$ lados	... Número de lados ...	$n = 4$
$m = \frac{(5-2)}{5} (180^\circ)$	... Sustituyendo ...	$m = \frac{(4-2)}{4} (180^\circ)$
$= \frac{3 \times 180^\circ}{5}$	... Operando ...	$= \frac{2 \times 180^\circ}{4}$
$m = 108^\circ$	... Resp. ...	$m = 90^\circ$

GUÍA DE ESTUDIO No. 36

1. ¿Cuáles de las figuras siguientes parecen pertenecer a polígonos regulares? Si el polígono dibujado no parece ser regular, dígame por qué no.



Hallar la medida en grados de cada ángulo de un polígono regular que tiene:

- | | | |
|-------------|--------------|--------------|
| 2. 7 lados | 3. 20 lados | 4. 12 lados |
| 5. 30 lados | 6. 102 lados | 7. 200 lados |

Hallar la medida en grados de la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de:

- | | | |
|--------------|--------------|---------------|
| 8. 8 lados | 9. 14 lados | 10. 16 lados |
| 11. 30 lados | 12. 45 lados | 13. 102 lados |

¿Cuántas diagonales se pueden trazar de un mismo vértice de un polígono de:

- | | | |
|---------------|---------------|----------------|
| 14. 10 lados? | 15. 13 lados? | 16. 15 lados? |
| 17. 19 lados? | 18. 90 lados? | 19. 100 lados? |

20. ¿En cuántos triángulos quedan divididos cada uno de los polígonos del inciso 14 al 19 al trazar las diagonales a partir de un mismo vértice?

7.2. PERÍMETRO Y ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Calcular el perímetro de un polígono regular.
- ♦ Calcular el área de un polígono regular conociendo su apotema y la medida del lado.
- ♦ Determinar la medida del lado de un polígono regular conociendo el perímetro y el número de lados.
- ♦ Determinar la medida del apotema de un polígono regular conociendo el área y la longitud de un lado.

DEFINICION: La suma de las longitudes de los lados de un polígono se llama *perímetro del polígono*.

Si se conoce la longitud de uno de los lados de un polígono regular, también se conoce su perímetro, puesto que todos los lados de un polígono son congruentes. Si la longitud de un lado de un polígono regular de n lados es L , entonces el perímetro del polígono es:

$$P = nL$$

Donde: n = No. de lados del polígono.

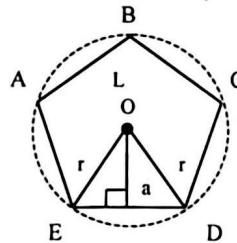
L = Longitud de cada lado del polígono.

P = Perímetro.

DEFINICION: El apotema (a) es el segmento de la perpendicular trazado desde el centro a cada uno de los lados comprendido entre el centro y el lado. Véase la figura de abajo.

Radio = $OE = OD = r$

Apotema = a



El área del polígono regular será igual a n veces el área de cada uno de los triángulos:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{La}{2}$$

$$\text{Área del polígono regular} = n \left(\frac{La}{2} \right)$$

$$= nL \left(\frac{a}{2} \right)$$

$$= \frac{Pa}{2} \quad \text{porque } P = nL \quad \text{Luego:}$$

El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por el apotema.

$$A = \frac{Pa}{2} \quad (6)$$

Despejando de la fórmula se tiene:

$$a = \frac{2A}{P} \quad (6.1) \quad \text{Para calcular el apotema.}$$

$$P = \frac{2A}{a} \quad (6.2) \quad \text{Para calcular el perímetro.}$$

Ejemplo 1. Si el polígono de la figura de la página anterior tiene como medida del lado 6cm y 3.5cm de apotema. ¿Cuál es su área?

Solución:

$$P = nL = 5 \times 6 \text{ cm} = 30 \text{ cm} \quad \dots \text{ Calculando el perímetro P.}$$

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{30\text{cm} \times 3.5\text{cm}}{2} \quad \dots \text{ Sustituyendo y operando.}$$

$$A = \frac{105}{2} \text{ cm}^2 = 52.5 \text{ cm}^2 \quad \text{Área de Polígono} \quad \dots \text{ Resp.}$$

Ejemplo 2. Si el lado de un polígono regular de 17 lados es 2.2 mm, determinar su perímetro y su área si el apotema mide 0.33 cm.

Solución:

$$P = nL = 17 \times 2.2 \text{ mm} = 37.4 \text{ mm} \quad \dots \text{ Calculando el perímetro P.}$$

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{37.4\text{mm}(0.33\text{cm})}{2} \quad \dots \text{ Sustituyendo y, expresando todo en las mismas unidades y operando.}$$

$$= \frac{37.4\text{mm} \times 3.3\text{mm}}{2} = \frac{123.42}{2} \text{ mm}^2 \quad \dots \text{ Calculando el área.}$$

$$\text{La medida del área es } 61.71\text{mm}^2 \quad \dots \text{ Resp.}$$

Ejemplo 3. Si el perímetro de un polígono regular de 120 cm y la medida de su apotema es 15.39 cm. ¿Cuál es su área?

Solución:

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{120\text{cm} \times 15.39\text{cm}}{2} = \frac{1,846.8}{2} \text{ cm}^2 \quad \dots \text{ Sustituyendo y operando.}$$

$$= 923.4 \text{ cm}^2 \quad \text{Medida de su área.} \quad \dots \text{ Resp.}$$

Ejemplo 4. Determinar la medida del lado L de un eneágono regular (9 lados) si su perímetro es de 1,098 dm.

Solución:

$$P = nL; \quad n = 9 \text{ lados} \quad \dots \text{ Fórmula del perímetro y número de lados del polígono.}$$

$$L = \frac{P}{n} \quad \dots \text{ Fórmula despejada para encontrar el largo del lado del polígono.}$$

$$L = \frac{P}{n} = \frac{1,098\text{dm}}{9} = 122 \text{ dm} \quad \dots \text{ Sustituyendo y operando.}$$

$$\text{Medida del lado del polígono: } 122 \text{ dm} \quad \dots \text{ Resp.}$$

Ejemplo 5. Determinar la medida del apotema de un dodecágono cuya área es de 2.520 m^2 y la longitud de un lado es de 15 cm .

Solución:

$$\begin{aligned}
 n &= 12 \text{ lados} && \dots \text{ Número de lados.} \\
 P &= nL = 12 \times 15 \text{ cm} = 180 \text{ cm} && \dots \text{ Calculando el perímetro.} \\
 A &= \frac{Pa}{2} && \dots \text{ Fórmula del área.} \\
 a &= \frac{2A}{P} = \frac{2 \times 2.520 \text{ m}^2}{180 \text{ cm}} && \dots \text{ Sustituyendo.} \\
 a &= \frac{2 \times 2.520 \times 10,000 \text{ cm}^2}{180 \text{ cm}} = \frac{50,400 \text{ cm}^2}{180 \text{ cm}} = 280 \text{ cm} && \dots \text{ Operando } 1 \text{ m}^2 = 10,000 \text{ cm}^2 \\
 a &= 280 \text{ cm} \\
 \text{La medida del apotema es } 280 \text{ cm} &&& \dots \text{ Resp.}
 \end{aligned}$$

IMPORTANTE:



1. Todo polígono regular puede ser inscrito en una circunferencia.
2. El **ángulo central** de un polígono regular, es el formado por dos radios que corresponden a los extremos de un mismo lado. En la figura de la página 147, $\widehat{EOD}$ es el ángulo central del polígono.

En algunos casos, puede pedirse calcular el área de un **Polígono Regular Inscrito** en una circunferencia, conociendo solamente el número de lados del polígono y el radio del mismo. El siguiente cuadro resume fórmulas (cuya deducción en este curso no es importante conocerla), que ayudarán al cálculo del área del polígono en las condiciones dadas.

Nombre	No. Lados (n)	Longitud del Lado (L)	Área
Triángulo Equilátero	3	$L = r\sqrt{3}$	$A = 0.433 L^2$
Cuadrado	4	$L = r\sqrt{2}$	$A = L^2$
Pentágono	5	$L = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$A = 1.721 L^2$
Hexágono	6	$L = r$	$A = 2.598 L^2$
Octágono	8	$L = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$A = 4.828 L^2$
Decágono	10	$L = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$	$A = 7.694 L^2$

Ejemplo 1. Calcular el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = 5 \text{ cm}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} && \dots \text{ Fórmula para calcular el lado del pentágono. (Ver Cuadro).} \\
 &= \frac{5}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2} \sqrt{10 - 2(2.236068)} && \dots \text{ Sustituyendo y operando en la fórmula.}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt{10} - 4.472136 = \frac{5}{2} \sqrt{5.527864} = \frac{5}{2} (2.351141)$$

$$L = 5.877853 \text{ cm}$$

$$A = 1.721 L^2 = 1.721(5.877853 \text{ cm})^2$$

$$= 1.721(34.549150 \text{ cm}^2) = 59.459088 \text{ cm}^2$$

$$A = 59.46 \text{ cm}^2 \quad \text{Área del pentágono regular} \quad \dots \text{ Resp.}$$

... Longitud de lado del polígono.

... Calculando el área del polígono regular con la fórmula correspondiente.

... Operando.

Ejemplo 2. Calcular el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio $r = 12 \text{ plg}$.

Solución:

$$L = r$$

$$L = r = 12 \text{ plg.}$$

$$A = 2.598 L^2$$

$$= 2.598(12 \text{ plg})^2 = 2.598(144 \text{ plg}^2)$$

$$A = 374.11 \text{ plg}^2 \quad \text{Área del hexágono regular} \quad \dots \text{ Resp.} \quad (2 \text{ cifras de aproximación})$$

... Fórmula para calcular lado del polígono.

... Longitud del lado del hexágono

... Fórmula del área del hexágono

Ejemplo 3. Un octágono regular está inscrito en una circunferencia de 16.4 mm de diámetro. Calcular: a) La longitud del lado del octágono; b) El perímetro; c) El área del octágono.

Solución:

$$\text{a) } r = \frac{d}{2} = \frac{16.40}{2} \text{ mm} = 8.20 \text{ mm}$$

$$L = r \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 8.2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$= 8.2(\sqrt{2 - 1.414214}) = 8.2 \sqrt{0.585786}$$

$$= 8.2(0.765367) \text{ mm}$$

$$L = 6.28 \text{ mm}$$

... Calculando la longitud del radio. ¿Por qué?

... ¿Qué se hizo?

... Resp. ¡¡ Continúelo Ud. !!

$$\text{b) } P = 50.24 \text{ mm}$$

$$\text{c) } A = 12,186.15 \text{ mm}^2$$

... ¡¡ ¿Son estas sus respuestas? !! En caso contrario corrijalas y consulte con su profesor.

IMPORTANTE:



1. Los valores de las longitudes de los lados y el área de un polígono regular, dados en el cuadro, son aproximados.
2. Si se desea simplificar los cálculos, puede determinarse de antemano los valores de los radicales, que son valores constantes.

$$\diamond \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2.351141$$

$$\diamond \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0.765367$$

$$\diamond \sqrt{5 - 1} = 1.236068$$

3. Se sugiere el uso de la calculadora en este tema para agilizar los cálculos.

GUIA DE ESTUDIO No. 37

Resolver los siguientes problemas:

1. Calcular el perímetro y el área de un polígono regular de 18 lados cuyo apotema mide 10 cm y la longitud de cada lado mide 12 cm.
2. Calcular el perímetro y el área de un polígono regular de 25 lados cuyo apotema mide 25 dm y la longitud de cada lado es de 19 dm.
3. Calcular la medida de un lado de un octágono regular si su perímetro es de 200 cm.
4. Calcular la medida de un lado de un undecágono regular si su perímetro es de 440 m.
5. Hallar la medida del apotema de un polígono regular de 19 lados si su área es de 2,337 mm y la medida de uno de sus lados es de 10 cm.
6. Hallar el perímetro de un polígono regular cuya apotema mide 14 dm y su área es de 1,428 cm².
7. Hallar el número de lados de un polígono regular cuya apotema mide 14 pies y su perímetro es de 350 pies. Área: 2,450 pies cuadrados; longitud de un lado: 10 pies.
8. Hallar el número de lados de un polígono regular cuyo lado mide 1.2 dm y su perímetro es de 984 cm.

GUIA DE ESTUDIO No. 38

Resolver los siguientes problemas:

Los polígonos regulares dados a continuación, están inscritos en una circunferencia de radio dado. Calcular en cada uno: **a)** la longitud de cada lado (L); **b)** el perímetro (P) y **c)** el área (A) del polígono.

- | | | |
|-----------------|--|------------|
| 1. Un cuadrado | inscrito en una circunferencia de radio: r | 12.40 cm |
| 2. Un cuadrado | inscrito en una circunferencia de radio: r | 8.12 pies |
| 3. Un pentágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 12.00 dm |
| 4. Un pentágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 14.26 m |
| 5. Un hexágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 25.30 plg. |
| 6. Un hexágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 18.44 mm |
| 7. Un octágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 20.14 cm |
| 8. Un octágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 37.62 yds. |
| 9. Un decágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 16.21 dm |
| 10. Un decágono | inscrito en una circunferencia de radio: r | 8.25 pies |

XXXXX
XXXX
X

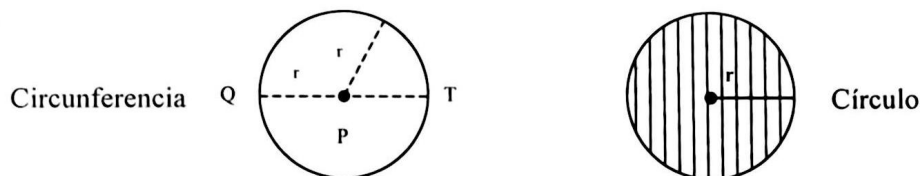
7.3. CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA. ELEMENTOS. PARTES GEOMETRICAS

CONCEPTO DE CÍRCULO Y SUS ELEMENTOS

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Diferenciar entre círculo y circunferencia.
- ♦ Reconocer partes geométricas de una circunferencia, radio, cuerda, diámetro, secante, tangente, ángulo central, arco, semicircunferencia.
- ♦ Identificar partes geométricas de un círculo: segmento circular, sector circular, anillo circular o corona, trapecio circular.

En términos generales, una **circunferencia** es la frontera o curva que limita a una región redonda del plano.



En las siguientes definiciones se expresan las ideas anteriores en un lenguaje más preciso.

DEFINICION: CIRCUNFERENCIA: Sea P un punto y r un número positivo. La circunferencia con centro en P y radio r , es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto P .

DEFINICION: CÍRCULO: El conjunto de todos los puntos de un plano cuya distancia a un punto P llamado **centro** es menor que el radio se llama círculo.

IMPORTANTE: El interior de la circunferencia se llama círculo. La circunferencia tiene longitud y el círculo tiene área o superficie.

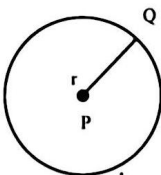


PARTES GEOMETRICAS DE UNA CIRCUNFERENCIA

a) Radio

Un radio r de una circunferencia, es un segmento que va del centro P a un punto Q cualquiera de la circunferencia.

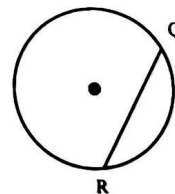
$$r = PQ$$



b) Cuerda

Una cuerda c de una circunferencia es un segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

$$c = RQ$$



c) Diámetro

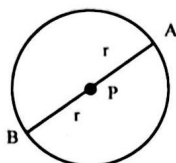
El diámetro d de una circunferencia es una cuerda que contiene al centro P .

$$d = \overline{AC}$$

$$r = AP = PB$$

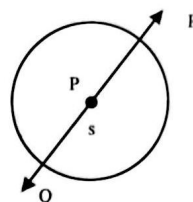
$$d = \overline{AP} + \overline{PB}$$

$$d = r + r = 2r$$

**d) Secante**

Una secante s de una circunferencia es la recta que la corta en dos puntos.

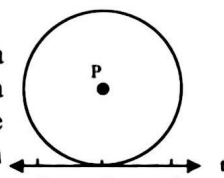
$$s = \overleftrightarrow{RQ}$$

**e) Tangente**

La tangente t de una circunferencia, es una recta (en el mismo plano) que toca a la circunferencia en un solo punto Q llamado punto de tangencia.

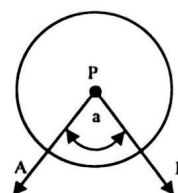
$$t = \overleftrightarrow{RS}$$

Q = Punto de tangencia.

**f) Ángulo Central**

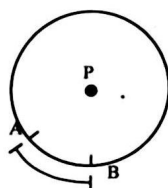
Un ángulo central α de una circunferencia; es un ángulo cuyo vértice está en el centro de la misma.

$$\alpha = \angle APB = \text{ángulo central}$$

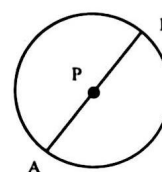
**g) Arco**

Un arco de una circunferencia es una parte de ella. A y B son los extremos del arco $\widehat{AB}$; se representa así:

$$b = \widehat{AB}$$

**h) Semicircunferencia**

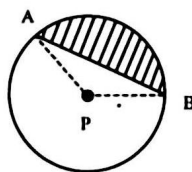
Si A y B son los extremos de un diámetro entonces se obtienen dos arcos iguales, cada uno de ellos se llama semicircunferencia.

**IMPORTANTE:**

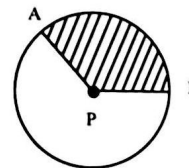
1. Una recta perpendicular a un radio en su extremo, es tangente a la circunferencia.
2. Recíprocamente, toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de tangencia.

i) Segmento Circular

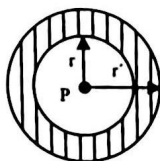
Un segmento circular es la región determinada por un arco de una circunferencia y la cuerda correspondiente.

**j) Sector Circular**

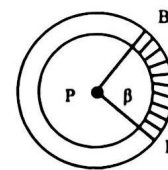
Un sector circular es la región limitada por dos radios y el arco intersectado por los radios del ángulo central

**k) Anillo Circular o Corona**

Un anillo circular o corona es la región limitada por dos círculos que tienen el mismo centro o que son concéntricos.

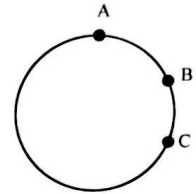
**l) Trapecio Circular**

Un trapecio circular es la intersección de una corona circular y un ángulo central.

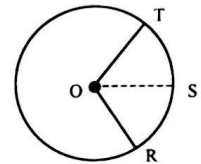


GUIA DE ESTUDIO No. 39

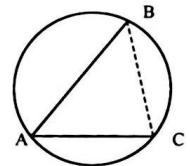
1. ¿Puede haber más de un diámetro en un círculo? ¿Porqué?
2. Si AB y CD son diámetros de un mismo círculo. ¿Dónde se cortan?
3. El arco ilustrado en la figura de la derecha es el arco ABC, que se escrib $\widehat{ABC}$. Si $\widehat{ABC}$ fuera una semicircunferencia, ¿qué podría decirse sobre lo puntos A y C?



4. Al ángulo $\widehat{TOR}$, ¿Qué clase de ángulo es respecto a la circunferencia?
5. Nombrar 3 arcos diferentes en la figura de la derecha.
6. ¿Qué ángulo intersecta al arco RS?



7. ¿Qué clase de ángulo es $\widehat{BAC}$ respecto a la circunferencia?
8. ¿Qué arco es intersectado por el ángulo $\widehat{BAC}$?



9. Nombre 4 ángulos centrales de la figura de la derecha

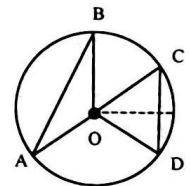
10. Nombre dos ángulos que intersectan al arco $\widehat{BC}$

11. ¿Qué clase de triángulo es $\triangle DOC$?

12. Nombre tres cuerdas.

13. ¿Cuál de ellas es un diámetro?

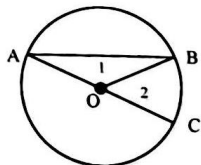
14. ¿Qué clase de triángulo es $\triangle AOB$?



15. ¿Qué puede decirse sobre $\widehat{OAB}$ y $\widehat{OBC}$?

16. ¿Qué clase de ángulos son los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$?

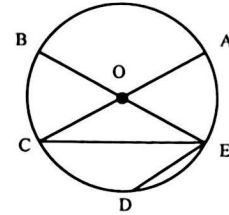
17. ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle AOB$ con respecto a la circunferencia?



GUIA DE ESTUDIO No. 40

En la figura de la derecha:

1. Nombre el ángulo central que intersecta a $\widehat{AE}$: _____
2. Nombre el ángulo central que intersecta a $\widehat{BC}$: _____
3. Nombre el ángulo central correspondiente a $\widehat{CDE}$: _____
4. Nombre dos cuerdas que no sean diámetros: _____
5. Nombre una cuerda que sea diámetro: _____
6. ¿Cuál es el arco intersectado por $\widehat{BOA}$? _____
7. ¿cuál es el arco intersectado por $\widehat{DEB}$? _____

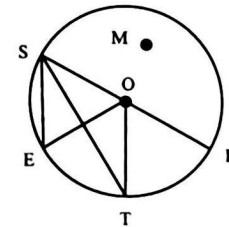


Dibuje un círculo con centro en O. Dibuje dos diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y las cuerdas que conectan sus extremos.

8. Determinar 4 pares de triángulos congruentes: _____
9. Nombre un par de cuerdas paralelas: _____
10. Nombre la figura geométrica formada. ¿Qué tipo de figura es? _____
11. Nombre un arco que sea una semicircunferencia, y el ángulo recto que lo intersecta. _____

En la figura de la derecha:

12. Nombre del diámetro de la circunferencia: _____
13. ¿Están contenidos en el círculo los puntos S y R? _____
14. Nombrar una cuerda de la circunferencia: _____
15. ¿Está contenido el punto M en el círculo? _____
¿En la circunferencia? _____
16. Nombre el arco de circunferencia más pequeño. _____
17. Nombre dos ángulos centrales. _____



18. Una circunferencia es tangente a dos rectas paralelas en A y B como puntos de tangencia. Haga la figura, trace $\overline{AB}$. ¿Qué puede decirse de $\overline{AB}$? _____

XXXXX
XXXX
X

7.4. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Calcular la longitud de una circunferencia.
- ♦ Calcular el área de un círculo, de un anillo circular o corona y de un sector circular.
- ♦ Resolver problemas donde se aplique la longitud de la circunferencia, el área de un círculo, de un anillo circular y de un sector circular.

DEFINICION: Llamaremos **Número Phi** (π) a la razón de la longitud de la Circunferencia (C) a su diámetro (d). Esta razón o su resultado que es lo mismo, no depende del tamaño de las circunferencias:

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{\text{Longitud de la Circunferencia}}{\text{Diámetro}}$$

El símbolo π es una letra griega y se lee “Pi”. El cálculo del número π se remonta a la época de los antiguos griegos. Arquímedes en el siglo II A.C., dio un valor aproximado de π , mediante la expresión:

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.142857143...$$

En 1946 D.F. Ferguson dio el valor de π con 730 decimales. En 1958 F. Genuys y F.G. Felton dieron mas de 10,000 cifras decimales. El valor aproximado de π en la práctica es de 3.14 ó 3.1416 o 22/7. (El profesor de la clase debe seleccionar la aproximación que se desee).

De la igualdad $\pi = \frac{C}{d}$ se concluye que $C = \pi d$.

IMPORTANTE:

1. La longitud de la circunferencia C es 2π veces la medida del radio.
2. La longitud de la circunferencia es:



$$C = 2 \pi r = \pi d$$

3. El radio de la circunferencia es la mitad del diámetro.
4. El diámetro de la circunferencia contiene 2 radios.

Ejemplos:

1. El diámetro de una circunferencia es de 10 m. Encontrar su longitud. ($\pi = 3.14$).

Solución:

$$d = 10 \text{ m}$$

$$C = 2\pi r = \pi d$$

$$C = 2 \times 3.14 \times 5 \text{ m} = 31.4 \text{ m}$$

$$C = 31.4 \text{ m}$$

Longitud del diámetro

... Diámetro dado.

... Fórmula dada.

... Sustituyendo y operando.

... Resp.

2. Un diámetro de una rueda mide 106 cm; a) ¿Cuántos cm recorrerá en una vuelta?; b) ¿En 10 vueltas?; c) ¿Cuántas vueltas dará para recorrer 1,600 m?. ($\pi = 3.14$).

Solución:

- a) $C = \pi d = 3.14 \times 106 \text{ cm} = 332.84 \text{ cm}$... Resp.
 b) $332.84 \times 10 \text{ vueltas} = 3,328.4 \text{ cm}$... Resp.
 c) $1,600 \text{ m} = 1,600 \times 100 \text{ cm} = 160,000 \text{ cm}$... Convirtiendo los m a cm.
 En una vuelta recorre 332.84 1: 332.84 cm ... Formulando la proporción y resolviéndola.
 En x vueltas recorre 160,000 cm x : 160,000 cm

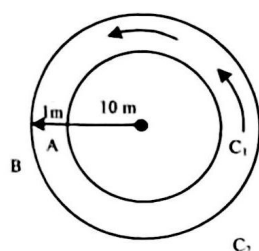
$$x = \frac{160,000 \times 1}{332.84} = 480.71145$$

Aproximadamente dará 481 vueltas.

... Resp.

3. Dos ciclistas A y B parten de los puntos a) y b) siguiendo las rutas que corresponden respectivamente a las circunferencias C_1 y C_2 . Determinar cuántos metros recorre el ciclista B con relación al ciclista A en 2 vueltas. ($\pi = 3.14$).

Solución:



$$C_1 = 2 \pi r_1 \\ = 2 \times 3.14 \times 10 \text{ m} = 62.8 \text{ m}$$

... Espacio recorrido por el ciclista A que corresponde a la longitud C_1 con $r_1 = 10\text{m}$.

$$C_2 = 2 \pi r_2 \\ = 2 \times 3.14 \times 11 \text{ m} = 69.08\text{m}$$

... Espacio recorrido por el ciclista B que corresponde a la longitud C_2 con $r_2 = 11\text{m}$.

$$(69.08 - 62.8)\text{m} = 6.28 \text{ m}$$

... Lo que el ciclista B recorre más que el A en una vuelta.

$$6.28\text{m} \times 2 = 12.56 \text{ m}$$

... Lo que el ciclista B recorre más que el A en dos vueltas.

El ciclista B recorre 12.56 m más que el A en dos vueltas completas

... Resp.

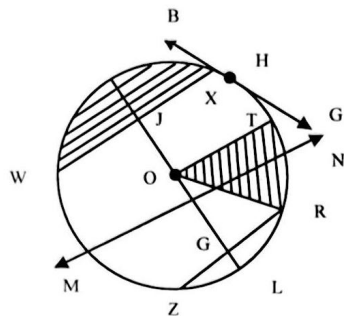
 *

GUIA DE ESTUDIO No. 41

Escriba dentro del paréntesis de la izquierda una "V" si la proposición es verdadera y una "F" si es falsa.

1. () Un círculo es una curva simple cerrada.
2. () Un círculo es un polígono regular.
3. () Un círculo es un polígono.
4. () Un círculo tiene exactamente 2 diámetros.
5. () Una cuerda es una parte de una secante.
6. () El diámetro de un círculo es una cuerda.
7. () El radio es una parte del diámetro.
8. () Un círculo contiene a su interior.
9. () Un círculo contiene cuando menos, uno de sus radios.

En la figura de la izquierda identifique:



10. Radios _____
11. Cuerdas _____
12. Diámetro _____
13. Secantes _____
14. Tangentes _____
15. 5 arcos _____
16. Un segmento circular _____
17. Un sector circular _____

7.5. AREA DEL CÍRCULO. AREA DEL ANILLO CIRCULAR Y DEL SECTOR CIRCULAR

La forma de determinar el área de un polígono regular nos da la pauta para expresar el área de un círculo. Todos los polígonos inscritos en un círculo y en particular los regulares están incluidos en él y por lo tanto, el área de cada polígono es menor que la del círculo. Esta diferencia se hace cada vez más pequeña a medida que el polígono regular tiene muchos más lados, con lo cual se puede afirmar que los polígonos regulares dentro de un círculo tienden a la circunferencia y su área a la del círculo. Existen en este caso un proceso de aproximación indefinida; el contorno del polígono tiende a la circunferencia; su perímetro a la longitud de la circunferencia y el apotema al radio. Las consideraciones anteriores nos conducen a admitir que la fórmula del área de un polígono regular que es $P = (Pa)/2$ se podría usar en lugar del perímetro y el apotema, la longitud de la circunferencia y su radio respectivamente a fin de obtener:

$$C = 2 \pi r$$

$$A = \frac{Pa}{2}$$

$$A = \frac{2\pi r}{2} (r) = \pi r^2$$

Es decir que: El área de un círculo A_c es igual al producto del número π por el cuadrado del radio r .

Área del Círculo: $A_c = \pi r^2$

Ejemplos:

1. Determinar el área de un círculo de 40 cm de diámetro.

Solución:

$$d = 40 \text{ cm, entonces } r = \frac{d}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$$

$$A_c = \pi r^2 = 3.14(20 \text{ cm})^2 = 3.14 \times 400 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 1,256 \text{ cm}^2 \quad \text{Área del círculo}$$

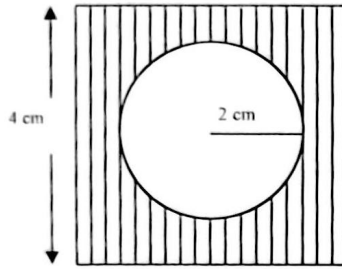
... El radio (r) es la mitad del diámetro (d).

... Sustituyendo y operando en la fórmula dada.

... Resp.

2. Determinar el área sombreada de la figura de la izquierda.

Solución:



Área Sombreada = Área del cuadrado – Área del círculo

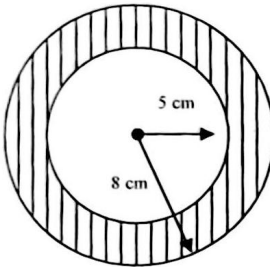
$$\begin{aligned} A_s &= \ell^2 - \pi r^2 \\ &= (4 \text{ cm})^2 - 3.14(2 \text{ cm})^2 \\ &= 16 \text{ cm}^2 - 3.14 \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= 16 \text{ cm}^2 - 12.56 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A_s = 3.44 \text{ cm}^2$$

... Resp.

3. Determinar el área sombreada de la figura.

Solución:



Área Sombreada = Área círculo grande – Área círculo pequeño

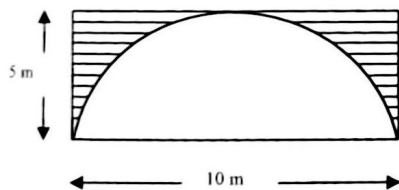
$$\begin{aligned} A_s &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= 3.14(8 \text{ cm})^2 - 3.14(5 \text{ cm})^2 \\ &= 3.14(64 \text{ cm}^2) - 3.14(25 \text{ cm}^2) \\ &= 200.96 \text{ cm}^2 - 78.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A_s = 122.46 \text{ cm}^2$$

... Resp.

4. Hallar el área sombreada de la figura.

Solución:



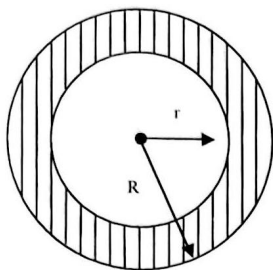
Área Sombreada = Área del rectángulo – Área mitad de círculo

$$\begin{aligned} A_s &= bh - \frac{\pi r^2}{2} \\ &= (10 \text{ m} \times 5 \text{ m}) - \frac{3.14(5 \text{ m})^2}{2} \\ &= 50 \text{ m}^2 - \frac{3.14(25 \text{ m}^2)}{2} \\ &= 50 \text{ m}^2 - \frac{78.5 \text{ m}^2}{2} \\ &= 50 \text{ m}^2 - 39.25 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$A_s = 10.75 \text{ m}^2$$

... Resp.

AREA DE UN ANILLO CIRCULAR O CORONA



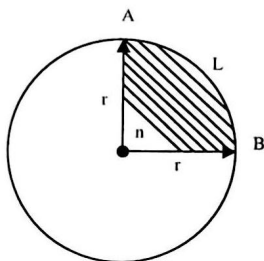
La figura de la izquierda, se llama **anillo** o **corona circular**. El área de ella, en la que **R** es el radio del círculo mayor y **r** el radio del círculo menor, viene dada por la fórmula:

$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

Donde R = Radio mayor
r = Radio menor
 $\pi = 3.14$

AREA DE UN SECTOR CIRCULAR

La figura de la izquierda se llama **sector circular** de radio **r**, longitud de arco **L** y ángulo central **n**. El área del sector circular, viene dada por la fórmula:



$$A = \frac{1}{2} Lr$$

Donde A = Área del sector circular en función del radio y la longitud de arco.

L = Longitud del arco intersectado.

r = Radio del círculo

ó también:

$$A = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}$$

Donde A = Área del sector circular en función del radio y de su ángulo central.

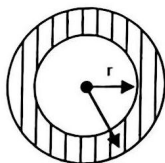
n = Medida en grados del ángulo central.

r = Radio del círculo.

$\pi = 3.14$

Ejemplo 1. Hallar el área de la corona circular de radios $R = 16 \text{ cm}$ y $r = 10 \text{ cm}$.

Solución:



$R = 16 \text{ cm}$
 $r = 10 \text{ cm}$
 $\pi = 3.14$

... Datos dados.

$$\begin{aligned} A &= \pi(R^2 - r^2) = 3.14[(16 \text{ cm})^2 - (10 \text{ cm})^2] \\ &= 3.14(256 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2) \\ &= 3.14(156 \text{ cm}^2) = 489.84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

... Fórmula del área la corona circular.
Sustituyendo y operando

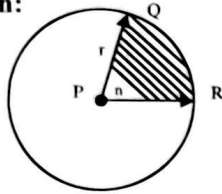
$$A = 489.84 \text{ cm}^2$$

Área buscada

... Resp.

Ejemplo 2 Calcular el área del sector circular de radio $r = 12$ dm que subtiende un ángulo central de 68° .

Solución:



$$\begin{aligned} n &= 68^\circ \\ r &= 12 \text{ dm} \\ \pi &= 3.14 \end{aligned}$$

... Datos dados.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{3.14(12\text{dm})^2 \times 68^\circ}{360^\circ} = \frac{30,746.88}{360^\circ} \\ &= 85.408 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

... Área del sector circular en función del radio y del ángulo central. Sustituyendo y operando.

$$A = 85.41 \text{ dm}^2$$

Área buscada

... Resp.

Ejemplo 3. Calcular el área del sector circular de 32 mm de radio y con una longitud de arco de 4.2 dm.

Solución:

$$r = 32 \text{ mm}$$

$$L = 4.2 \text{ dm} = 4.2 \times 10 \text{ mm} = 42 \text{ mm}$$

... Datos del problema reducidos a una misma unidad de medida.

$$A = \frac{1}{2} Lr$$

... Fórmula del área de un sector circular en función del radio y de la longitud del arco.

$$= \frac{1}{2} (32 \text{ mm})(42 \text{ mm}) = \frac{1}{2} (1,344 \text{ mm}^2) = 672 \text{ mm}^2$$

... ¿Qué se hizo?

$$A = 672 \text{ mm}^2$$

Área buscada

... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 42

Calcular en cada caso, el área de la corona circular de radio mayor R y radio menor r . Resolverlos en hojas adicionales y entregar al profesor.

1. $R = 16 \text{ dm}$; $r = 28 \text{ cm}$
2. $R = 14 \text{ pies}$; $r = 15.5 \text{ pulg.}$
3. $R = 18 \text{ cm}$; $r = 0.9 \text{ dm}$
4. $R = 132.1 \text{ mm}$; $r = 4.5 \text{ dm}$
5. $R = 183 \text{ yds}$; $r = 81.6 \text{ yds}$
6. $R = 321.6 \text{ m}$; $r = 24.2 \text{ Dm}$
7. $R = 173.8 \text{ mm}$; $r = 0.14 \text{ dm}$
8. $R = 88.8 \text{ yds}$; $r = 366 \text{ pulg}$

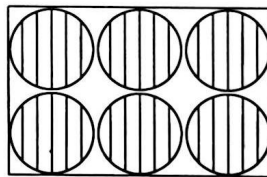
Calcular en cada caso, el área del Sector Circular en los que:

9. $L = 14 \text{ cm}$; $r = 8 \text{ cm}$
10. $L = 17.2 \text{ dm}$; $r = 10 \text{ dm}$
11. $L = 483 \text{ dm}$; $r = 130 \text{ dm}$
12. $L = 203 \text{ pulg}$; $r = 10 \text{ pies}$
13. $n = 45^\circ$; $r = 18 \text{ cm}$
14. $n = 78^\circ$; $r = 12 \text{ pulg}$
15. $n = 120^\circ$; $r = 143 \text{ mm}$

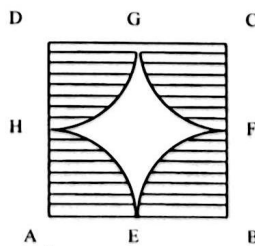
GUIA DE ESTUDIO No. 43

Hallar el área de cada círculo de radio (r) o diámetro (d), según se indique. $\pi = 3.14$

1. $r = 10.3 \text{ dm}$
2. $d = 18.8 \text{ cm}$
3. $r = 10 \text{ m}$
4. $d = 9.8 \text{ pies}$
5. $d = 3 \text{ m}, 2 \text{ dm}, 1 \text{ cm}$
6. $d = 34 \text{ vrs}, 5 \text{ plg.}$
7. $r = 102.8 \text{ mm}, 4 \text{ cm}$
8. Un jardín circular de 60m está rodeado por una cerca de 6 m de ancho. ¿Cuál es el área de ésta cerca?
9. El precio para construir la acera del ejercicio anterior es de L. 56.78 por metro cuadrado. ¿Cuánto cuesta toda la acera?
10. En la figura de abajo el diámetro de cada disco circular mide 2 cm. ¿Qué parte de la superficie del rectángulo no está cubierta por los círculos?



11. De una pieza de hojalata de forma cuadrada de 10 cm de lado, se recorta un círculo de 10 cm de diámetro. ¿Qué parte de la hojalata se desperdició?
12. La figura de abajo es un cuadrado de 10 cm de lado. $\widehat{EF}$ es un arco de un círculo con centro en B; $\widehat{FG}$ es un arco de círculo con centro en C; $\widehat{GH}$ es un arco de círculo con centro en D y $\widehat{HE}$ un arco de círculo con centro en A. Calcular el valor del área sombreada.



**

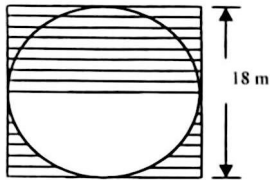
GUIA DE ESTUDIO No. 44

Copie y complete la siguiente tabla, tomando como valor de $\pi = 3.14$.

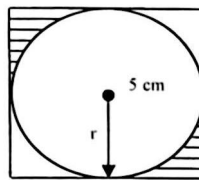
	Radio (r)	Diámetro (d)	Circunferencia (C)	Área (A)
1.	12 cm			
2.		8 cm		
3.			314 cm	
4.				314 cm ²

Calcular el área sombreada de las siguientes figuras geométricas combinadas:

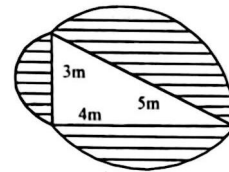
5.



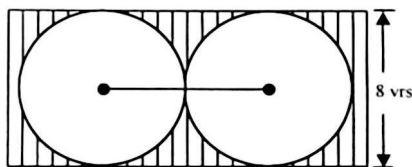
6.



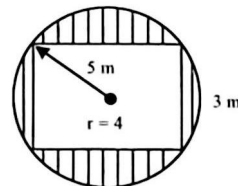
7.



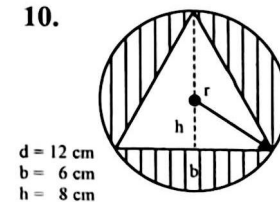
8.



9.



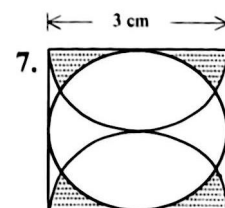
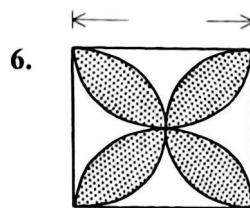
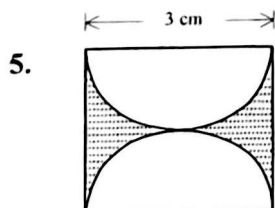
10.



GUIA COMPLEMENTARIA DE ESTUDIO No. 7

1. Encontrar el área de un octágono regular con lados de longitud 5 m y apotema k.
2. Encontrar el área de un hexágono regular con apotema $3\sqrt{3}$.
3. Si el apotema de un hexágono es 5 m, ¿cuál es el perímetro y el área?
4. Si el área de un hexágono es $36\sqrt{3}$ cm², ¿cuál es el apotema y la longitud de cada lado?

En las figuras, encontrar el área de la región sombreada. Lo longitud del cuadrado es 3 cm.



Calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 8. 18 lados | 9. 25 lados | 10. 32 lados | 11. 58 lados |
| 12. 62 lados | 13. 70 lados | 14. 80 lados | |

¿Cuál es la medida en grados de cada ángulo interno de un polígono regular de:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 15. 16 lados | 16. 18 lados | 17. 24 lados | 18. 30 lados |
| 19. 35 lados | 20. 40 lados | 21. 60 lados | 22. 80 lados |

Calcular: a) perímetro y b) área de un polígono regular de:

23. 15 lados de 3.6 cm cada uno y apotema 2.01 cm
 24. 20 lados de 4.0 cm cada uno y apotema 2.0 cm
 25. 25 lados de 5.4 cm cada uno y apotema 3.2 cm
 26. 30 lados de 8.6 cm cada uno y apotema 4.0 cm
 27. 35 lados de 10.4 cm cada uno y apotema 5.2 cm
 28. 40 lados de 12.6 cm cada uno y apotema 5.8 cm

Utilizando la tabla de la página 149, calcular: a) la longitud del lado y b) área de un polígono regular inscrito en una circunferencia:

29. Un pentágono, $r = 12$ cm
 30. Un hexágono, $r = 18$ cm
 31. Un octágono, $r = 15.6$ dm
 32. Un decágono, $r = 20.5$ dm

Calcular el área de:

33. Una corona circular de $R = 14.8$ cm y $r = 10.2$ cm
 34. Una corona circular de $R = 10.2$ m y $r = 6.4$ m
 35. Una corona circular de $R = 20.5$ dm y $r = 8.6$ dm
 36. Una corona circular de $R = 26.8$ dm y $r = 19.4$ dm
 37. Un sector circular de $r = 18$ cm que subtiende un ángulo central de 75°
 38. Un sector circular de $d = 14$ m que subtiende un ángulo central de 80°
 39. Un sector circular de $d = 20$ cm que subtiende un ángulo central de 90°
 40. Un sector circular de $r = 30$ dm que subtiende un ángulo central de 120°
 41. Un sector circular de $r = 40$ cm y 6.4 cm de longitud de arco.
 42. Un sector circular de $r = 28$ dm y 1.4 dm de longitud de arco.
 43. Un sector circular de $r = 50.6$ dm y 10.8 cm de longitud de arco.
 44. Un sector circular de $r = 60.8$ m y 20.4 m de longitud de arco.

RESPUESTAS

- | | | | |
|---|--|--|---------------------------|
| 1. 20k | 3. $20\sqrt{3}$ m, $50\sqrt{3}$ m ² | 5. 1.9314 cm ² | 7. 1.9814 cm ² |
| 9. 4,140° | 11. 10,080° | 13. 12,240° | |
| 15. 157.5° | 17. 165° | 19. 169.71° | |
| 21. 173.99° | 23. $P = 54$ cm, $A = 54.27$ cm ² | 25. $P = 135$ cm, $A = 216$ cm ² | |
| 27. $P = 364$ cm, $A = 946.4$ cm ² | 29. $L = 14.11$ cm, $A = 342.63$ cm ² | 31. $L = 11.94$ dm, $A = 688.29$ dm ² | |
| 33. $A = 361.1$ cm ² | 35. $A = 1,087.35$ dm ² | 37. $A = 211.95$ cm ² | |
| 39. $A = 78.5$ cm ² | 41. $A = 128$ cm ² | 43. $A = 2,732.4$ cm ² | |

UNIDAD 8. ÁREA Y VOLUMEN DE ALGUNOS SÓLIDOS GEOMETRICOS

8.1. CONCEPTO Y ELEMENTOS DE POLIEDROS: PRISMA, PARALELEPÍPEDO, PIRAMIDE. ÁREA LATERAL Y TOTAL. VOLUMEN.

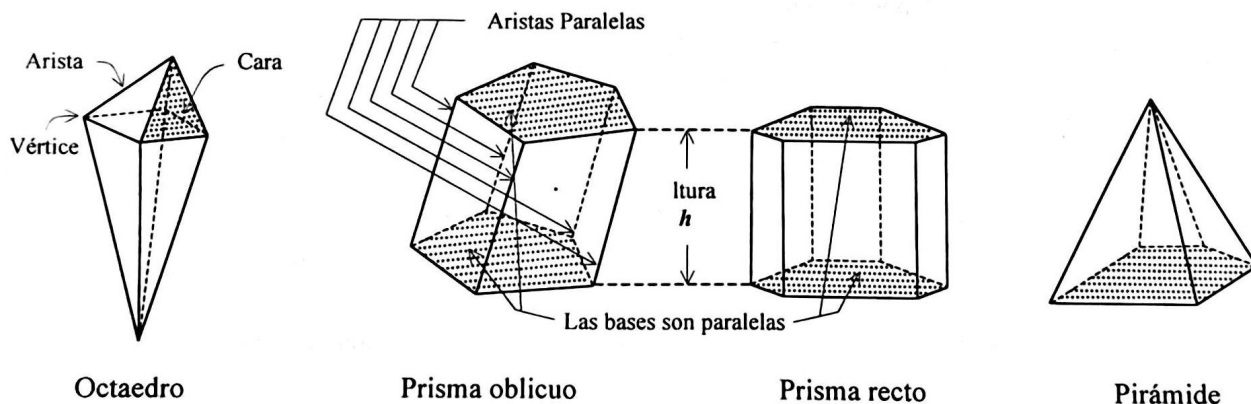
OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Reconocer los elementos básicos de algunos poliedros y su clasificación.
- ♦ Calcular el área lateral de un poliedro.
- ♦ Calcular el área total de un poliedro.
- ♦ Resolver problemas que involucren el área lateral y total de un poliedro.

POLIEDROS

DEFINICION: Un *poliedro* es un cuerpo limitado por cuatro o más polígonos planos o, también, la superficie de un sólido cuyas caras son regiones poligonales.

Las figuras de abajo corresponden a algunos poliedros:

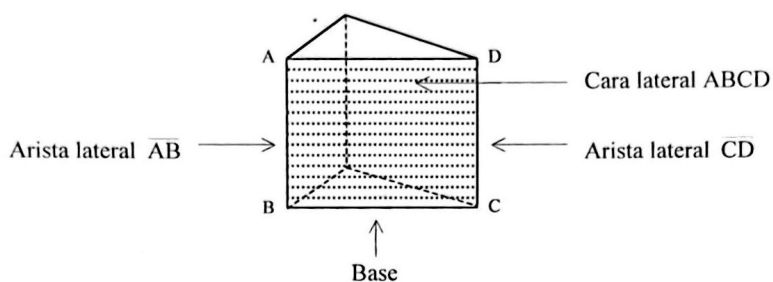


PRISMAS

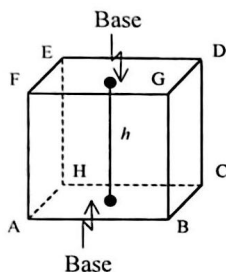
PRISMA: Es un poliedro limitado por dos polígonos iguales llamados bases y cuyas caras laterales son paralelogramos.

En un prisma hay que identificar los siguientes elementos:

- ♦ **Base del prisma:** cualquier lado en el que pueda descansar.
- ♦ **Aristas laterales:** en un prisma son las rectas que unen los vértices de las bases.
- ♦ **Caras laterales:** cada una de las que contienen dos aristas laterales.
- ♦ **Arista lateral:** la recta donde se intersectan dos caras laterales y no pertenecen a las bases.



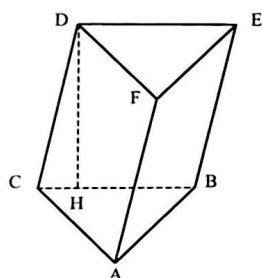
Altura (h): Es la longitud de un segmento entre las bases y perpendicular a ellas.



Prisma Recto

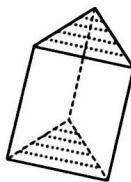
Un prisma es **recto** si sus caras laterales son rectángulos y sus aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases. Si un prisma recto tiene por base polígonos regulares, se llama **prisma regular**.

En la figura del lado $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CD}$, $\overline{HE}$ son las **aristas laterales** y no pertenecen a las bases.

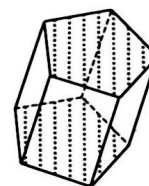


Prisma Oblicuo

Un prisma es **oblicuo** si sus aristas laterales no son perpendiculares a los planos de la base.



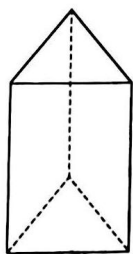
Prisma Triangular oblicuo



Prisma Pentagonal oblicuo

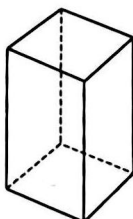
El nombre de un prisma depende del polígono que tenga como base. Se darán el nombre de los mas comunes:

Prisma triangular	: Es un prisma cuya base es un triángulo.	(Figura 1.1.)
Prisma cuadrangular	: Es un prisma cuya base es un cuadrado.	(Figura 1.2.)
Paralelepípedo	: Es un prisma cuya base es un paralelogramo.	(Figura 1.3.)
Ortoedro	: Es un prisma recto cuya base es un rectángulo.	(Figura 1.4.)
Cubo	: Es un prisma recto cuya base es un cuadrado y su altura es igual a la longitud del lado del cuadrado.	(Figura 1.5.)



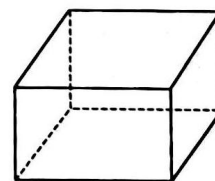
Prisma Triangular

Figura 1.1.



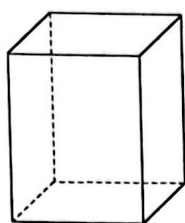
Prisma Cuadrangular

Figura 1.2.



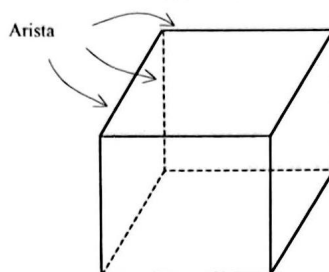
Paralelepípedo

Figura 1.3.



Ortoedro

Figura 1.4.



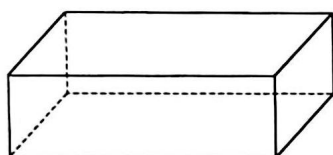
Cubo

Figura 1.5.

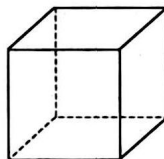
VOLUMEN: de un poliedro es la medida del espacio limitado por un cuerpo. Se mide en unidades cúbicas: m^3 , cm^3 , plg^3 , pie^3 , etc.

EL PARALELEPIPEDO

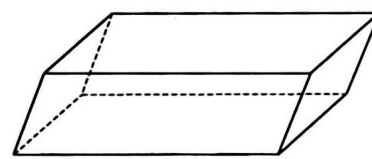
PARALELEPÍPEDO: Es un prisma cuyas bases son paralelogramos.



Paralelepípedo Recto



Cubo



Paralelepípedo Oblicuo

El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por la longitud de su altura.

$$A_L = Ph$$

(8.1) donde A_L = Área lateral.
 P = Perímetro
 h = Altura

El área total se obtiene sumando el área lateral el doble del área de la base. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + 2B \\ A_T &= Ph + 2B \end{aligned}$$

(8.2)

El volumen de un prisma recto es igual al producto de sus tres dimensiones. O que es lo mismo, al producto del área de la base por la altura:

$$V = Bh$$

(8.3) donde V = Volumen
 B = Área de la base
 h = Altura

Ejemplos. Determinar a) el área lateral A_L ; b) el área total A_T ; c) el volumen V de:

1. Un prisma recto cuyas bases son rectángulos de 2.5 cm por 4 cm y 6.3 cm de alto.

Solución:

- a) $A_L = Ph$... Fórmula del área lateral. (8.1)
 $P = (2.5 + 4 + 2.5 + 4) \text{ cm} = 13 \text{ cm}$... Perímetro de la base rectangular.
 $A_L = 13.0 \text{ cm} (6.3) \text{ cm} = 81.9 \text{ cm}^2$... Sustituyendo y operando en la fórmula del área lateral.
 $A_L = 81.9 \text{ cm}^2$ Área Lateral ... Resp.
- b) $A_T = A_L + 2B$... Fórmula del área total. (8.2)
 $B = 2.5 \text{ cm} (4 \text{ cm}) = 10 \text{ cm}^2$... Área de la base.
 $A_T = 81.9 \text{ cm} + 2(10 \text{ cm}) = 101.9 \text{ cm}^2$... Sustituyendo y operando en la fórmula del área total.
 $A_T = 101.9 \text{ cm}^2$ Área Total ... Resp.
- c) $V = Bh = (2.5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}) (6.3 \text{ cm})$... Sustituyendo y operando en la fórmula del volumen. (8.3)
 $= 10 \text{ cm}^2 \times 6.3 \text{ cm}$
 $V = 63 \text{ cm}^3$ Volumen ... Resp.

2. Un prisma recto de base pentagonal de 5.3 cm de lado, 3 cm de apotema y 10.2 cm de altura.

Solución:

- a) $A_L = Ph = 5.3 \text{ cm} (5) (10.2) \text{ cm}$... El perímetro de la base es la longitud del lado, multiplicada por el número de lados.
 $= 26.5 \text{ cm} (10.2 \text{ cm}) = 270.3 \text{ cm}^2$... Operando.
 $A_L = 270.3 \text{ cm}^2$ Área Lateral ... Resp.
- b) $A_T = A_L + 2B = 270.3 \text{ cm}^2 + 2(5.3 \text{ cm} \times 5 \times 3 \text{ cm})$... Sustituyendo y operando en la fórmula del área total.
 $= 270.3 \text{ cm}^2 + 2(79.5 \text{ cm}^2)$
 $= (270.3 + 159) \text{ cm}^2 = 429.3 \text{ cm}^2$
 $A_T = 429.3 \text{ cm}^2$ Área Total ... Resp.
- c) $V = Bh = Pah$... $B = \text{perímetro} \times \text{apotema} = \text{área de la base}.$
 $= 5(5.3 \text{ cm}) \times 3 \text{ cm} \times 10.2 \text{ cm}$... Sustituyendo y operando.
 $= (26.5 \times 10.2) \text{ cm}^3 = 810.9 \text{ cm}^3$
 $V = 810.9 \text{ cm}^3$ Volumen ... Resp.

3. Un prisma recto cuyas bases son triángulos de 8 dm de lado y 14 dm de altura. Sus bases son triángulos equiláteros.

Solución:

- a) $A_L = Ph = (8 + 8 + 8) \text{ dm} \times 14 \text{ dm}$... ¿Qué se hizo?
 $= 24 \text{ dm} \times 14 \text{ dm} = 336 \text{ dm}^2$
 $A_L = 336 \text{ dm}^2$ Área Lateral ... Resp.

b) $A_T = A_L + 2B$

$$= 336 \text{ dm}^2 + 2 \left(\frac{8^2 \sqrt{3}}{4} \right) \text{ dm}^2$$

$$= 336 \text{ dm}^2 + 55.42 \text{ dm}^2 = 391.42 \text{ dm}^2$$

$A_T = 391.42 \text{ dm}^2$ **Área Total**

c) $V = Bh = \left(\frac{8^2 \sqrt{3}}{4} \right) \text{ dm}^2 \times 14 \text{ dm}$

$$= 27.71 \text{ dm}^2 \times 14 \text{ dm} = 387.98 \text{ dm}^3$$

$V = 387.98 \text{ dm}^3$ **Volumen**

... $B = bh = \text{base} \times \text{altura}$. Como es equilátero entonces el área se calcula con:

$$B = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

... Sustituyendo y operando.

... **Resp.**

... Sustituyendo y operando en la fórmula del volumen donde $B = 27.71 \text{ dm}^2$ calculado en A_T de arriba.

... **Resp.**

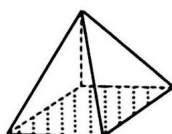
LA PIRAMIDE

LA PIRÁMIDE:

Es un poliedro limitado por un polígono cualesquiera que es la **base** y las **caras laterales** son triángulos que tienen un punto común (V) llamado **vértice**.



Pirámide triangular

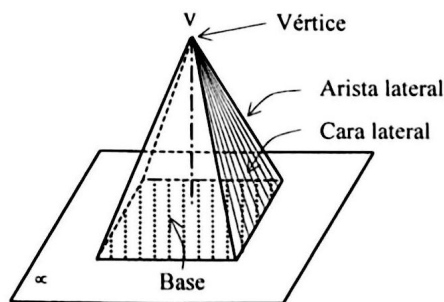
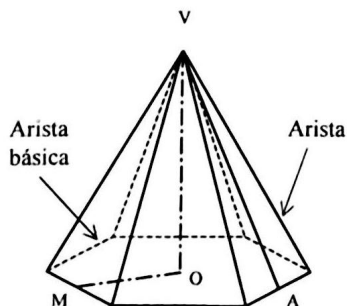


Pirámide cuadrada

Altura de la pirámide es el segmento perpendicular que une el vértice V con el plano de la base ($\overline{VO}$). (Ver figura de abajo).

Apotema de una pirámide es la altura de una de sus caras laterales ($\overline{VA}$). (Ver figura de abajo).

- ◆ **La apotema básica** : Es el segmento OM, que es el apotema de la base del polígono.
- ◆ **Arista lateral o arista** : Es cada uno de los lados de las caras laterales que concurren en el vértice V.
- ◆ **Arista básica** : Es cada uno de los lados del polígono base.
- ◆ **Pirámide regular** : Es aquella que tiene por base un polígono regular. Sus caras son triángulos isósceles iguales.



Las pirámides de acuerdo con la clase de polígono de la base, se clasifican en: **triangulares**, **rectangulares**, **pentagonales**, **hexagonales**, etc., según si la base es un triángulo, un rectángulo, un pentágono, un hexágono, etc. respectivamente.

El área lateral de la pirámide regular es igual al producto del semi perímetro de la base por la longitud del apotema de la pirámide.

$$A_L = \frac{Pa_p}{2}$$

(8.4) donde A_L = área lateral
 P = perímetro de la base
 a_p = apotema de la pirámide

El área total de una pirámide regular es la suma del área lateral con el área de la base.

$$A_T = A_L + B$$

$$A_T = \frac{Pa_p}{2} + \frac{Pa_b}{2}$$

$$A_T = \frac{P}{2}(a_p + a_b)$$

(8.5) donde A_L = área lateral
 B = área de la base de la
 pirámide: $B = \frac{Pa_b}{2}$
 A_T = área total
 P = perímetro de la base
 a_p = apotema de la pirámide
 a_b = apotema de la base

El volumen de una pirámide cualesquiera, es igual a un tercio del producto del área de la base por la medida de su altura.

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

(8.6) donde V = volumen
 B = área de la base
 h = altura de la pirámide

Ejemplos. Determinar a) área lateral; b) área total y c) volumen de:

- Una pirámide regular de base hexagonal de 10 cm de altura, sabiendo que el lado mide 3 cm, la apotema de la base mide 5 cm y la apotema de la pirámide es de 12 cm.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A_L &= \frac{Pa_p}{2} = \frac{6(3) \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} = \frac{18 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}{2} \\ &= \frac{216 \text{ cm}^2}{2} = 108 \text{ cm}^2 \\ A_L &= 108 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Área Lateral

... $P = 6 \text{ lados } (3 \text{ cm}) = 18 \text{ cm}$; $a_p = 12 \text{ cm}$ = apotema de la pirámide. Sustituyendo y operando en la fórmula. (8.4).

... Resp.

$$\text{b) } A_T = A_L + B$$

$$\begin{aligned} &= 108 \text{ cm}^2 + \frac{6 \times 3 \times 5}{2} \text{ cm}^2 = 108 \text{ cm}^2 + 45 \text{ cm}^2 \\ A_T &= 153 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Área Total

$$\text{... } B = \frac{Pa_b}{2} = \text{área de la base}$$

... Sustituyendo y operando en la fórmula (8.5).

... Resp.

NOTA: El área total se puede también obtener directamente de la fórmula (8.5), utilizando los apotemas y el semi perímetro de la base, así:

$$A_T = \frac{6 \times 3}{2} (12 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) = 9 \text{ cm}(17 \text{ cm}) = 153 \text{ cm}^2$$

$A_T = 153 \text{ cm}^2$ **Área Total**

c) $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \left(\frac{6 \times 3 \times 5}{2} \right) \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm}$... Sustituyendo y operando en la fórmula del volumen de la pirámide. (8.5).

$$= \frac{1}{3} (45 \text{ cm}^2)(10 \text{ cm}) = \frac{450}{3} \text{ cm}^3 = 150 \text{ cm}^3$$

$V = 150 \text{ cm}^3$ **Volumen** ... Resp.

2. Una pirámide de base pentagonal de 20 m de apotema, 8 m de lado, 4 m de apotema de la base y 18 m de altura.

Solución:

a) $A_L = \frac{Pa_p}{2} = \frac{(5 \times 8) \text{ m} \times 20 \text{ m}}{2} = \frac{800 \text{ m}^2}{2} = 400 \text{ m}^2$... ¿Qué se hizo?

$A_L = 400 \text{ m}^2$ **Área Lateral** ... Resp.

b) $A_T = \frac{400 + (5 \times 8) \text{ m} \times 4 \text{ m}}{2}$... ¿Qué se hizo?

$$= 400 \text{ m}^2 + 80 \text{ m}^2 = 480 \text{ m}^2$$

$A_T = 480 \text{ m}^2$ **Área Total** ... Resp.

c) $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \left[\frac{5 \times 8 \times 4}{2} \text{ m}^2 \right] \times 18 \text{ m}$... ¿Qué se hizo?

$$= \frac{1}{3} (80 \text{ m}^2)(18 \text{ m}) = 480 \text{ m}^3$$

$V = 480 \text{ m}^3$ **Volumen** ... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 45

Escribir dentro del paréntesis de la izquierda una “V” si la proposición es verdadera o una “F” si es falsa.

1. () En todo prisma oblicuo sus aristas son paralelas.
2. () Los vértices de un poliedro son los puntos donde concurren solo tres caras.
3. () En un prisma recto, las bases son perpendiculares.
4. () Las aristas laterales en un prisma son las rectas que unen los vértices de cada base.
5. () Las aristas laterales de un prisma son parte de las bases.
6. () La altura de un prisma es paralela a las bases.
7. () Un cubo puede considerarse como un paralelepípedo.
8. () Las caras laterales de una pirámide son triángulos.
9. () La arista básica de una pirámide concurre en el vértice de la misma.

Copiar y completar la tabla para los poliedros A hasta H. Las letras v , c y a representan los números de vértices, caras y aristas respectivamente.

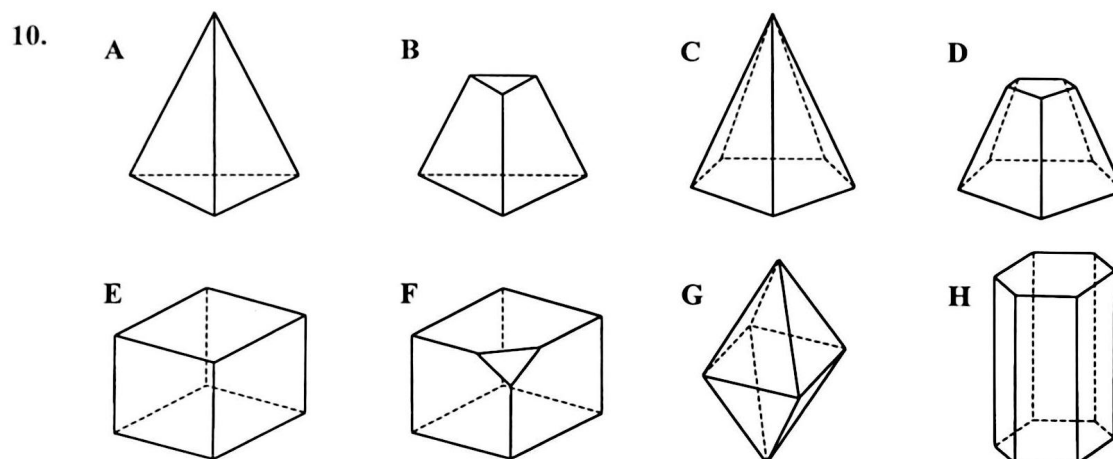
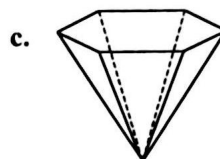
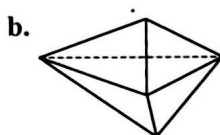
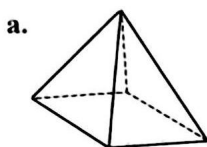


Figura	v	c	a	$v + c$	$(v + c) - a$
A	4	4	6	8	2
B	5	5	8	10	2
C	6	5	9	11	2
D	12	8	18	20	2
E	8	6	12	14	2
F	8	6	12	14	2
G	6	8	12	14	2
H	14	8	20	22	2

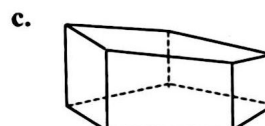
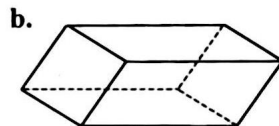
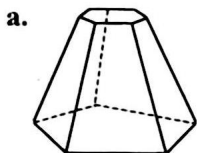
Determinar a) el área lateral A_L ; b) el área total A_T y c) el volumen V de:

11. Un prisma triangular recto, cuyas bases miden 8 cm, 6 cm y 10 cm. Su altura es de 18 cm. El triángulo de la base tiene 10 cm y 5 cm de altura.
12. Un prisma recto de base pentagonal de 10.6 cm de lado, 6 cm de apotema en su base y 20.4 cm de altura.
13. Un prisma recto cuyas bases son triángulos equiláteros de 16 dm de lado y 28 dm de alto.
14. Un prisma de base rectangular de 4 m $\times$ 8 m y 12.5 m de altura.

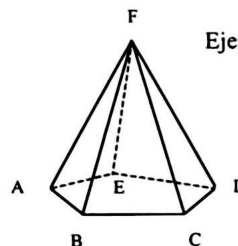
15. Un prisma recto de base rectangular de 10 dm $\times$ 15 dm y de 18 dm de altura.
16. Un prisma recto rectangular de base octagonal de 15 cm de lado, 1.9 dm de altura y 13.5 cm de apotema de la base.
17. Un prisma recto regular, de base hexagonal de 28 plg de lado, 3 pies de altura y 25 plg de apotema de la base.
18. De un prisma recto de base triangular cuyos lados miden 8 cm cada uno, su apotema es de 5.6 cm y su altura es de 18.6 cm.
19. De una pirámide de base cuadrada de 15 cm de lado y 10 cm de apotema en la base, 22 cm de apotema y de 18 cm de altura.
20. De una pirámide de base pentagonal de 10 m de lado, 6 m de apotema de la base, 20 m de apotema y 17 m de altura.
21. Una pirámide octagonal de base 0.8 dm de lado, 5 cm de apotema de la base, 0.2 m de apotema y 15 cm de altura.
22. Una pirámide de base hexagonal de 15.3 plg de lado, 10.8 plg de apotema en la base, 12.5 plg de apotema y 9.5 plg de alto.
23. ¿Cuál de estas figuras **no** es una pirámide y porqué?



24. ¿Cuál de estas figuras es un prisma y porqué?

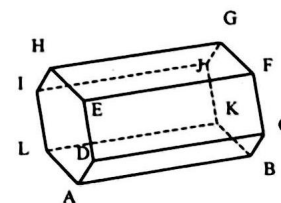


25. Cítense cinco aristas de la base en ésta pirámide.
26. Cítense cinco aristas laterales en ésta pirámide.
27. Identifíquense cinco caras laterales en ésta pirámide.
28. Cítense las aristas de la base de este prisma.
29. Cítense las aristas laterales de este prisma.
30. Identifíquense las caras laterales de este prisma.



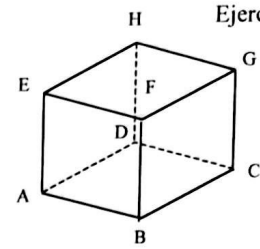
Ejercicios 25 - 27

31. ¿Qué relación existe entre el número de aristas de la base y el número de aristas laterales de una pirámide cualquiera?
32. ¿Qué relación existe entre el número de aristas de la base y el número de aristas laterales de un prisma cualquiera?



Ejercicios 28 - 30

33. Si se considera que el cubo que se muestra a continuación es un prisma y se tiene que ABCD es una base, dígame cuáles son la segunda base y las aristas laterales.
34. Para este mismo cubo, si se considera que ABFE es una base, dígame cuáles son la segunda base y las aristas laterales.
35. Si BCGF es una base del prisma, dígame cuál es la segunda base.
36. Si ABFE es una base del prisma, dígame cuál es la segunda base.



Ejercicios 33 - 34

En los ejercicios 37 al 41, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AB} = 6$ Y $\overline{BF} = 5$, encuentren las siguientes longitudes:

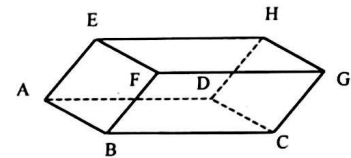
37. $AE =$ _____

38. $EH =$ _____

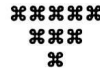
39. $CD =$ _____

40. $DH =$ _____

41. Dígame cuáles son los cuatro diagonales de éste paralelepípedo.



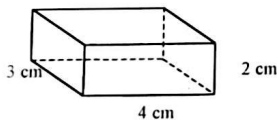
Ejercicios 35 - 41



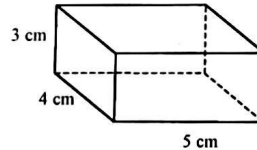
GUIA DE ESTUDIO No. 46

Encuéntrense los volúmenes de las cajas siguientes.

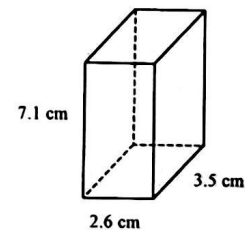
1.



2.

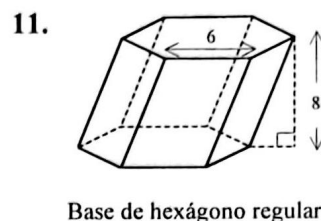
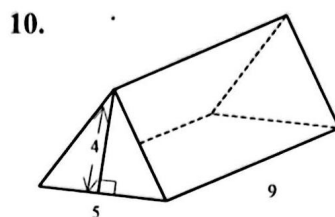
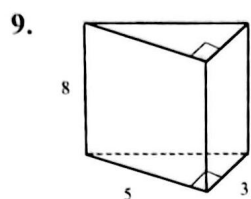


3.

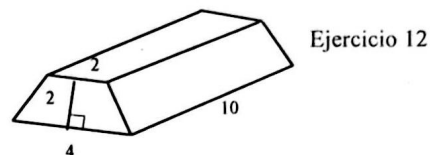


4. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 1?
5. ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 1?
6. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 2?
7. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado pueden colocarse en la caja del ejercicio 3?
8. ¿Cuántas pulgadas cúbicas tiene un pie cúbico?

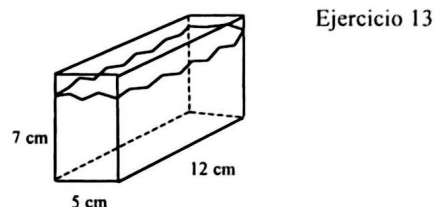
Encuéntrese el volumen de los prismas de los ejercicios 9 a 11:



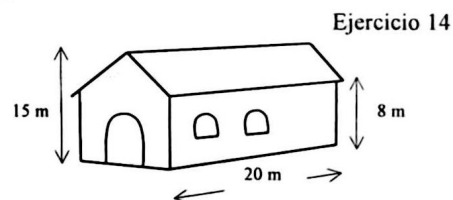
12. Los lingotes de plata son barras moldeadas como la de la figura. Los extremos son trapecios isósceles paralelos. ¿Cuál es el volumen?



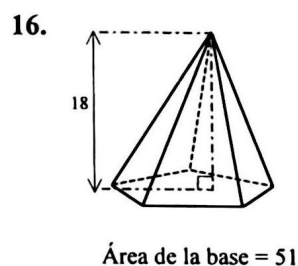
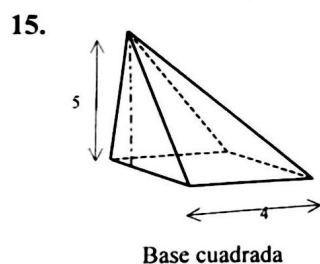
13. Un recipiente rectangular tiene 5 cm de ancho y 12 cm de longitud, y contiene agua hasta una profundidad de 7 cm. Se mete una piedra y el nivel del agua sube 1.7 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?



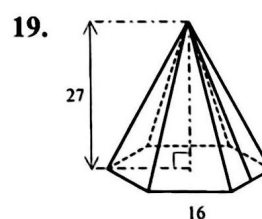
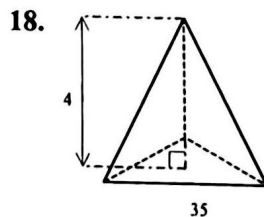
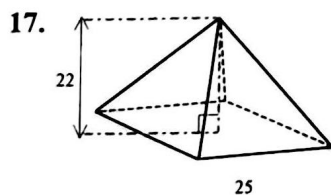
14. Un ingeniero necesita encontrar el volumen de una construcción para diseñar un sistema de calefacción. Encuéntrese el volumen de la construcción de la figura.



Encontrar el volumen de éstas pirámides:



En los ejercicios 17 a 19, encuéntrese el volumen de las pirámides regulares que se muestran.

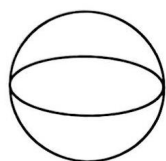


8.2. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS REDONDOS. EL CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN. ÁREA LATERAL, ÁREA TOTAL, VOLUMEN

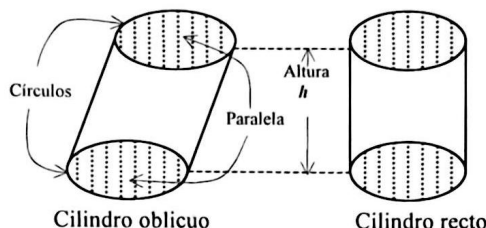
OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Identificar figuras del espacio que son redondas y sus elementos.
- ♦ Interpretar el origen y formación del cilindro de revolución.
- ♦ Calcular el área lateral y total de un cilindro de revolución.
- ♦ Calcular el volumen de un cilindro circular de revolución.
- ♦ Resolver problemas donde se apliquen los conceptos de área lateral, área total y volumen de un cilindro de revolución.

Otras figuras del espacio son redondas porque contienen círculos.

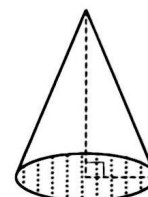


Esfera



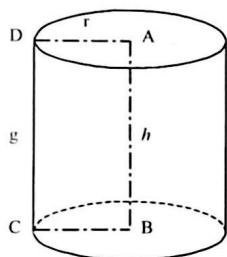
Cilindro oblicuo

Cilindro recto



Cono

EL CILINDRO



Se llama **cilindro de revolución**, al cuerpo engendrado por un rectángulo ABCD que gira alrededor de uno de sus lados (el lado $\overline{AB}$). El lado fijo llamado **eje de giro** ($\overline{AB} = h$) se llama **altura** del cilindro. El lado móvil CD se llama **generatriz** ($\overline{CD} = g$). Los lados $\overline{AO}$ y $\overline{BC}$ engendran en su rotación, dos círculos iguales que son las **bases** y cuyos centros son A y B. El **radio** de estos círculos es $\overline{AD} = \overline{BC} = r$. La generatriz engendra en su giro la **superficie lateral del cilindro**.

$$\overline{BC} = \begin{cases} \overline{AB} = h : \text{altura} \\ \overline{AD} = r : \text{radios de las bases} \\ \overline{DC} = g : \text{generatriz} \end{cases}$$

Área Lateral : $A_L = 2\pi rh$ (8.7) donde $h = \text{altura}$
 $r = \text{radio}$
 $\pi = 3.1416$

Área Total : $A_T = A_L + 2B$
 $= 2\pi rh + 2\pi r^2$
 $A_T = 2\pi r(h + r)$ (8.8)

Volumen : $V = \pi r^2 h$ (8.9)

Ejemplos. Determinar a) A_L ; b) A_T y c) V de un cilindro circular recto en el que:

1. El radio es de 12 cm y la altura de 24 cm.

Solución:

a) $A_L = 2\pi rh = 2 \times 3.1416 \times 12 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$

... Sustituyendo valores y operando en la fórmula (8.7).

$A_L = 1,809.56 \text{ cm}^2$ **Área Lateral**

... Resp.

b) $A_T = A_L + 2B$
 $= 1,809.56 \text{ cm}^2 + 2(3.1416(12 \text{ cm})^2)$
 $= 1,809.56 \text{ cm}^2 + 904.78 \text{ cm}^2$

... Fórmula dada. Sustituyendo y operando en la fórmula (8.8).

$A_T = 2,714.34 \text{ cm}^2$ **Área Total**

... Resp.

c) $V = \pi r^2 h = 3.1416(12 \text{ cm})^2 (24 \text{ cm})$
 $3.1416 \times 144 \text{ cm}^2 \times 24 \text{ cm}$

... Sustituyendo y operando en la fórmula del volumen (8.9).

$V = 10,857.34 \text{ cm}^3$ **Volumen**

... Resp.

2. El diámetro de la base es de 20 dm y la altura es de 1.2 dm

Solución:

Diámetro = 20 cm; Radio = $\frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm} = r$

... Escribiendo los datos en centímetros y calculando el valor del radio del cilindro.

Altura = 1.2 dm = $1.2 \times 10 \text{ cm} = 12 \text{ cm} = h$

a) $A_L = 2\pi rh = 2 \times 3.1416 \times 10 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$

... Sustituyendo y operando en la fórmula (8.7) del área lateral.

$A_L = 753.98 \text{ cm}^2$ **Área Lateral**

... Resp.

b) $A_T = A_L + 2B = 2\pi r(h + r)$
 $= 2 \times 3.1416 \times 10 \text{ cm} (12 + 10) \text{ cm}$

... Sustituyendo y operando en la fórmula (8.8) del área total.

$A_T = 1,382.30 \text{ cm}^2$ **Área Total**

... Resp.

c) $V = \pi r^2 h = 3.1416(10 \text{ cm})^2 (12 \text{ cm})$
 $3.1416 \times 100 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm}$

... Sustituyendo y operando en la fórmula del volumen (8.9).

$V = 3,769.92 \text{ cm}^3$ **Volumen**

... Resp.

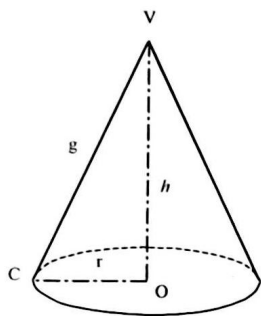
 *

8.3. EL CONO CIRCULAR DE REVOLUCION. ÁREA LATERAL. ÁREA TOTAL. VOLUMEN

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Interpretar el origen y formación de un cono circular recto de revolución.
- ♦ Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cono circular recto de revolución.
- ♦ Resolver problemas de aplicación de los conceptos anteriores: área lateral, área total y volumen de un cono circular recto de revolución.

EL CONO



Se llama **cono de revolución** al cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo ΔVOC que gira alrededor de uno de sus catetos $\overline{VO}$. Este cateto llamado **eje de giro** es la **altura** (h) del cono ($\overline{VO} = h$); el otro cateto, al girar engendra en su giro a un círculo de radio $\overline{CO} = r$ que es la **base** del cono. La hipotenusa engendra en su giro la **superficie lateral del cono**.

$\overline{VO} = h$: altura

$\overline{CO} = r$: radio de la base

$\overline{VC} = g$: generatriz

Área Lateral : $A_L = \pi r g$ (8.10) donde g = generatriz
 r = radio
 $\pi = 3.1416$

Área Total : $A_T = A_L + B$
 $= \pi r g + \pi r^2$
 $A_T = \pi r(g + r)$ (8.11)

Volumen : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ (8.12)

Ejemplos. Determinar: **a)** el área lateral A_L ; **b)** el área total A_T ; y **c)** el volumen V de los siguientes sólidos.

1. Un cono de 12 m de radio de la base, 17 m de altura y 20 m de generatriz.

Solución:

a) $A_L = \pi r g = 3.1416 \times 12 \text{ m} \times 20 \text{ m}$... ¿Qué se hizo?
 $= 3.1416 \times 240 \text{ m}^2 = 753.98 \text{ m}^2$

$A_L = 753.98 \text{ m}^2$ Área Lateral ... Resp.

b) $A_T = \pi r(g + r)$... Fórmula del área total (8.11).
 $= 3.1416 \times 12 \text{ m} (20 + 12) \text{ m}$... Sustituyendo y operando.
 $= 3.1416 \times 12 \text{ m} \times 32 \text{ m} = 1,206.37 \text{ m}^2$

$A_T = 1,206.37 \text{ m}^2$ Área Total ... Resp.

c) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} (3.1416)(12 \text{ m})^2 (17 \text{ m})$... ¿Qué se hizo?
 $= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 144 \text{ m}^2 \times 17 \text{ m}$

$V = 2,563.55 \text{ m}^3$ Volumen ... Resp.

2. Un cono de revolución de 4 dm de diámetro en su base, 21 cm de altura y 0.25 m de generatriz.

Solución:

Radio de la base : $r = \frac{d}{2} = \frac{4 \text{ dm}}{2} = 2 \text{ dm} = 20 \text{ cm}$... Datos del problema escritos en la misma unidad de medida.

Altura : $h = 21 \text{ cm}$

Generatriz : $g = 25 \text{ cm}$

a) $A_L = \pi r g = 3.1416(20 \text{ cm})(25 \text{ cm})$... Calculando el área lateral del cono con la fórmula (8.10).
 $= 3.1416(500) \text{ cm}^2 = 1,570.8 \text{ cm}^2$

$A_L = 1,570.8 \text{ cm}^2$ Área Lateral ... Resp.

b) $A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$... Fórmula del área total. (8.11)
 $= 3.1416(20 \text{ cm})(25 + 20) \text{ cm}$... Sustituyendo y operando.
 $= 3.1416(20 \text{ cm})(45 \text{ cm})$
 $= 3.1416(900 \text{ cm}^2) = 2,827.44 \text{ cm}^2$

$A_T = 2,827.44 \text{ cm}^2$ Área Total ... Resp.

c) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 3.1416(20 \text{ cm})^2 (21 \text{ cm})$... Sustituyendo y operando en la fórmula del volumen (8.12).
 $= 3.1416(400 \text{ cm}^2)(21 \text{ cm})$
 $= 3.1416(8,400 \text{ cm}^3) = 26,389.44 \text{ cm}^3$

$V = 26,389.44 \text{ cm}^3$ Volumen ... Resp.

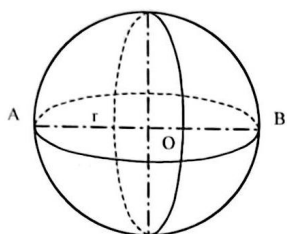
 *

8.4. LA ESFERA. ÁREA Y VOLUMEN

OBJETIVOS: Al finalizar este tema, el alumno podrá:

- ♦ Reconocer la forma en que se genera una esfera.
- ♦ Identificar los elementos principales de una esfera.
- ♦ Calcular el área y el volumen de una esfera.
- ♦ Resolver problemas de aplicación que incluya el área y el volumen de una esfera.

LA ESFERA



Al cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros se llama **esfera**.

El radio de la circunferencia $OA = r$ es también el **radio** de la esfera. El **centro de la esfera** coincide con el centro de la circunferencia. El **diámetro** de una esfera, es un segmento que pasando por el centro tiene sus extremos en la superficie esférica. El diámetro es el doble del radio.

$$AB = d : \text{diámetro } (2r)$$

$$OA = r : \text{radio}$$

$$O : \text{centro}$$

Área de la esfera : $A = 4\pi r^2$ (8.13)

Volumen de la esfera : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (8.14)

Ejemplos. Determinar: a) el área y b) el volumen de una esfera en la que:

1. El radio es de 4.2 cm.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 4\pi r^2 = 4 \times 3.1416(4.2 \text{ cm})^2 \\ &= 4 \times 3.1416 \times 17.64 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A = 221.67 \text{ cm}^2 \quad \text{Área}$$

... Sustituyendo valores en la fórmula del área.

... Operando.

... Resp.

$$\begin{aligned} \text{b) } V &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}(3.1416)(4.2 \text{ cm})^3 \\ &= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 74.088 \text{ cm}^3 = 310.34 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$V = 310.34 \text{ cm}^3 \quad \text{Volumen}$$

... Sustituyendo valores en la fórmula del volumen.

... Operando.

... Resp.

2. El diámetro es de 18 plg.

Solución:

Diámetro = 18 plg, entonces radio $r = \frac{18}{2} = 9$ plg.

a) $A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.1416(9 \text{ plg})^2$... ¿Qué se hizo?
 $= 4 \times 3.1416 \times 81 \text{ plg}^2 = 1,017.88 \text{ plg}^2$... ¿Qué se hizo?

A = 1,017.88 plg² Área ... Resp.

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}(3.1416)(9 \text{ plg})^3$... ¿Qué se hizo?
 $= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 729 \text{ plg}^3 = 3,053.64 \text{ plg}^3$

V = 3,053.64 plg³ Volumen ... Resp.

GUIA DE ESTUDIO No. 47

1. () Un triángulo rectángulo que gira sobre uno de sus catetos, genera un cilindro de revolución.
2. () Un cono de revolución se considera engendrado por la rotación de un trapecio alrededor de un lado perpendicular a las bases.
3. () La hipotenusa de un triángulo rectángulo, genera la superficie lateral de un cono.
4. () El eje de giro de un cilindro de revolución es llamado su altura.
5. () El radio de una circunferencia es también un radio de la esfera que engendra al girar sobre uno de sus diámetros.
6. () El radio de una esfera es la mayor cuerda que pasa por el centro de la misma.
7. () La esfera se engendra cuando una semicircunferencia gira alrededor de una cuerda.
8. () En un cilindro oblicuo, su altura es perpendicular a las bases.
9. () La generatriz de un cilindro engendra en su giro, la superficie lateral de un cilindro.
10. () El área lateral de un cilindro de revolución, incluye el área de las bases.

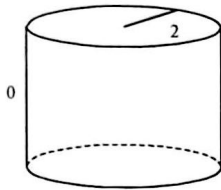
A partir de los siguientes problemas calcular: a) el área lateral A_L , b) el área total A_T y c) el volumen V . ($\pi = 3.1416$).

11. De un cono de revolución de 24 cm de diámetro en su base, 15 cm de altura y 18 cm de generatriz.
12. Un cono de revolución de 14.8 cm en su base, 1.2 dm de altura y 12.5 cm de generatriz.
13. Un cono de revolución de 15.32 plg de altura, 1.5 pies de generatriz y 1 pie de diámetro en su base.
14. Un cono de revolución que tiene 10 cm de radio en su base, 15 cm de altura y 18 cm de generatriz.
15. Un cono de revolución que tiene 16.7 dm de altura, 8.4 dm de diámetro en su base y 20 dm de generatriz.

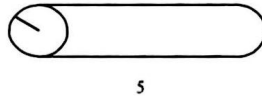
16. Un cono de revolución de 3.5 dm de diámetro de su base, 28 cm de altura y 0.36 m de generatriz.
17. De un cilindro de 12 cm de radio en sus bases y 20 cm de altura.
18. De un cilindro circular recto de 0.36m de diámetro y 0.22 m de altura.
19. De un cilindro circular recto de 4.8 plg de diámetro en sus bases y 1.5 pies de altura.
20. De un cilindro circular recto de 0.083 Dm de radio en sus base y 95 cm de altura.

Encuéntrense el área y el volumen de los cilindros de los ejercicios 21 a 23.

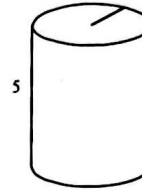
21.



22.



23.



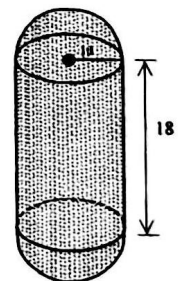
24. Un depósito cilíndrico tiene 17 pies de altura, y el radio de su base es 10 pies. ¿Cuántos pies cúbicos contiene el depósito?
25. ¿Cuántas yardas cúbicas contiene el depósito del ejercicio 24?
26. Una columna cilíndrica de mármol mide 9 pies de altura y 80 cm de diámetro. Si 1 m^3 de mármol pesa 300 kg, encuéntrese el peso de la columna.

Calcular: a) área, b) volumen de la esfera, dado:

27. Diámetro $d = 14.6 \text{ cm}$
28. Diámetro $d = 18.5 \text{ cm}$
29. Diámetro $d = 8.6 \text{ cm}$
30. Radio $r = 0.06 \text{ pies}$
31. Radio $r = 1.08 \text{ plg}$
32. Radio $r = 0.082 \text{ yds}$

En los ejercicios 33 a 34, supóngase que el sólido de la derecha es un cilindro recto tapado con dos semiesferas.

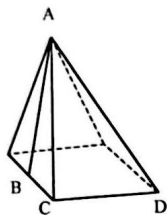
33. Encuéntrese el volumen del sólido que se muestra.
34. Encuéntrese el área del sólido que se muestra.
35. Encuéntrese el volumen de una esfera cuya área es 144π unidades cuadradas.
36. Encuéntrese el área de una esfera cuyo volumen es 36π unidades cúbicas.



GUIA COMPLEMENTARIA No. 8

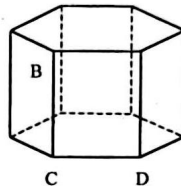
1. Encuéntrese el área y el volumen de un cubo con aristas de 4 cm.
2. Encuéntrese las área de las pirámides y del prisma regulares que se muestran a continuación.

a.



AB = 10 cm, CD = 6 cm

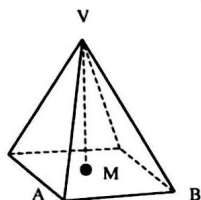
b.



BC = 6 cm, CD = 2 cm

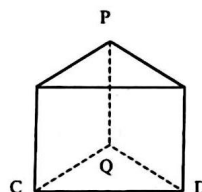
3. Encuéntrese los volúmenes de la pirámide y el prisma regulares.

a.



VM = 8 cm, AB = 5 cm

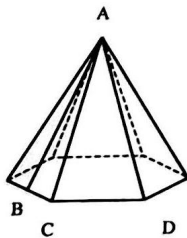
b.



PQ = 8 cm, CD = 4 cm

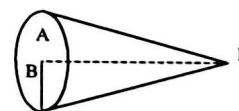
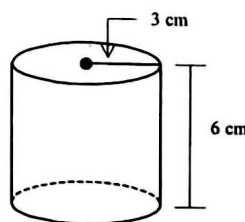
4. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel se necesitan para una etiqueta de una lata cilíndrica de 10 cm de altura y base circular de 6 cm de diámetro?
5. Encuéntrese el volumen de la lata cilíndrica del ejercicio 4.
6. El volumen de un cilindro recto es 160π . Si la altura es 10, ¿cuál es el diámetro de la base?
7. Encuéntrese el volumen del cono circular, donde PA = 12 cm y AB = 3 cm.
8. Si la altura de un cono circular recto se duplica, ¿cómo afecta esto al volumen?
9. Una esfera tiene un volumen de $36\pi \text{ cm}^3$. ¿Cuál es su radio?
10. Encuéntrese el área de una esfera con radio 10 cm.
11. Encuéntrense las áreas de la pirámide regular y el cilindro circular recto siguientes.

a.



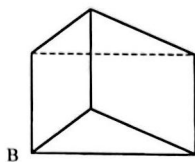
AB = 6 cm, CD = 2 cm

b.



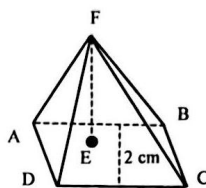
12. Encuéntrense los volúmenes del prisma y de la pirámide con base trapezoidal siguientes.

a.



$AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$,
 $BD = 12 \text{ cm}$

b.



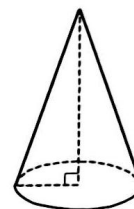
$AB = 4 \text{ cm}$, $DC = 3 \text{ cm}$,
 $FE = 5 \text{ cm}$

13. ¿Cuántos centímetros cúbicos de líquido podrían caber en un cono circular recto si su altura es 8 cm y el radio de su base es 3 cm?

14. Encuéntrense el área de un cono circular recto si la base tiene radio 2 cm y su altura es de 6 cm.

15. Encuéntrense el volumen del cono descrito del ejercicio 14.

16. Encuéntrense el volumen de una esfera de radio 3 cm.



Ejercicios 13 - 15

RESPUESTAS

1. $A = 96 \text{ cm}^2$; $V = 64 \text{ cm}^3$

2. a) $A = 156 \text{ cm}^2$, b) $A = 92.78 \text{ cm}^2$

3. a) $V = 66.67 \text{ cm}^3$, b) $V = 55.43 \text{ cm}^3$

4. 188.50 cm^2

5. $V = 282.74 \text{ cm}^3$

6. $d = 8$

7. $V = 113.10 \text{ cm}^3$

8. El volumen se duplica

9. $r = 3 \text{ cm}$

10. $A = 1,256.64 \text{ cm}^2$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NUMEROS IMPARES

Guía de Estudio No. 1

Pág. 4

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $9x^2 + 12x + 4$; | 3. $4x^2 - 28x + 49$; | 5. $25x^2 - 20xy - 4y^2$; |
| 7. $36x^2 + 60xy + 25y^2$; | 9. $9z^4 - 24z^2t^3 + 16t^6$; | 11. $25x^6 + 30x^3u^2 + 9u^4$; |
| 13. $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$; | 15. $8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6$; | 17. $125x^3 - 75x^2y + 15xy^2 - y^3$; |
| 19. $343x^3 - 294x^2 + 84x - 8$; | 21. $x^2 - 16$; | 23. $9x^2 - 25$; |
| 25. $4x^2 - 25y^2$; | 27. $49x^2 - 36y^2$; | 29. $4a^4 - 9b^4$; |
| 31. $25a^4 - 49b^6$; | 33. $\frac{a^2}{9} - \frac{b^2}{4}$; | 35. $\frac{4a^2}{9b^2} - \frac{9c^2}{16d^2}$; |
| 37. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$; | 39. $x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy + 6xz - 6yz$; | 45. $x^3 + 8$; |
| 41. $x^2 - y$; | 43. $2x - 3y$; | |
| 47. $x^3 - 27$; | 49. $8x^3 + 1$ | |

Guía de Estudio No. 2

Pág. 7

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|---|-------------------------------|
| 1. $x(x + 2b)$; | 3. $a(b + c)$; | 5. $15a(a - 2b)$; | 7. $3xz(x - y)$; |
| 9. $a(a^2 - 2a + 3)$; | 11. $4abc(c + 2b - 3a)$; | 13. $(x + 1)(a - 3)$; | 15. $(3y - 5)(2x - y + 2z)$; |
| 17. $(x + y)(u + v)$; | 19. $(r - s)(3s + 5)$; | 21. $(3a + 15b)((1 - 1) = (13a + 15b)(0) = 0$; | |
| 23. $(p - q)(p + m)$; | 25. $(3 - 7x)(2m - 3n)$; | 27. $(a + 1)(3b + 1)$; | 29. $(m^2 - 3n)(4am - 1)$; |
| 31. $(x - 2)(y + 4)$; | 33. $(a + b)(a + 2)$; | 35. $(x + 5)(y - 1)$; | 37. $(4 - x)(3 + 2y)$; |
| 39. $(a^2 + 1)(a + 2)$; | 41. $(x^2 - 3)(x + 4)$; | 43. $(x + 2)(y + 3)$; | 45. $(x + 5)(y + 6)$; |
| 47. $(a + b)(x + y)$; | 49. $(d + 3)(c - 4)$; | 51. $(a + b)(c - d)$ | |

Guía de Estudio No. 3

Pág. 10

- | | | | |
|---|--|--|----------------------------|
| 1. $(2x + 1)(2x - 1)$; | 3. $(9 - 3y)(9 + 3y)$; | 5. $5(5x - y)(5x + y)$; | 7. $6(2y - z)(2y + z)$; |
| 9. $4(3x - 4)(3x + 4)$; | 11. $\left(\frac{a}{6} - \frac{9}{7}\right)\left(\frac{a}{6} + \frac{9}{7}\right)$; | 13. $(1 - 3x)((5x + 1)$; | 15. $(3x - 2a)(-x - 2a)$; |
| 17. $(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$; | | 19. $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$; | |
| 21. $(4f - 9)(16f^2 + 36f + 81)$; | | 23. $(6mn - 4)(36m^2n^2 + 24mn + 16)$; | |
| 25. $(8 - 5s)(64 + 40s + 25s^2)$; | | 27. $(3m - 4n^3)(9m^2 + 12mn^3 + 16n^6)$; | |
| 29. $(hg^2b^3 - hrn^3)(h^2g^4b^6 + h^2g^2b^3n^3 + h^2r^2n^6)$; | | 31. $(6 - x^4)(36 + 6x^4 + x^8)$ | |

Guía de Estudio No. 4

Pág. 13

- | | | | |
|--------------------------|----------------|--------------------------|------------------------------|
| 1. Si; | 3. Si; | 5. Si; | 7. Si; |
| 9. Si; | 11. Si; | 13. 9; | 15. 16; |
| 17. 4; | 19. 10; | 21. $(a - 2)(a - 2)$; | 23. $(2t + 3)(2t + 3)$; |
| 25. $(2z - 5)(2z - 5)$; | 27. No es TCP; | 29. $(2x + 3)(2x + 3)$; | 31. $(6x - 2y^4)(6x - 2y^4)$ |

Guía de Estudio No. 5

Pág. 17

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1. $(x + 3)(x + 2)$; | 3. $(x - 7)(x + 2)$; | 5. $(x - 6)(x - 4)$; | 7. $(x + 2)(x + 1)$; |
| 9. $(x - 4)(x + 1)$; | 11. $(x + 12)(x - 11)$; | 13. $(x - 10)(x + 11)$; | 15. $(x - 6)(x + 1)$; |
| 17. $(y + 12)(y + 12)$; | 19. $(x - 7)(x + 2)$; | 21. $(t - 11)(t + 6)$; | 23. $(m + 4)(m + 2)$; |
| 25. $(m - 5)(m - 4)$; | 27. $(m - 7n)(m + 3n)$; | 29. $(3x + 1)(x - 2)$; | 31. $(5x - 2)(x + 3)$; |

33. $(3x + 2)(4x - 3)$; 35. $(2a + 1)(5a + 3)$; 37. $(4y + 1)(5y - 1)$; 39. $(7x + 5)(x - 7)$;
 41. $(2a + 1)(a + 2)$; 43. $(a + 1)(9a + 1)$; 45. $(3x + 2)(7x - 1)$; 47. $(3a + 2)(5a - 6)$;
 49. $(10n - 3)(2n + 5)$; 51. $(x + 10)(2x + 9)$; 53. $(4n - 11)(n + 3)$

Guía de Estudio No. 6

Pág. 23

1. $(x + 2)(x + 1)$; 3. $(x + 2)(x + 2)$; 5. $(x - 1)(x - 1)$; 7. $(x - 3)(x - 2)$;
 9. $(x + 8)(x - 1)$; 11. $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$; 13. $(x + 1)(2x + 1)$;
 15. $(3x + 1)(x + 2)$; 17. $(x - 2)(2x - 1)$; 19. $(2x + 3)(x + 2)$; 21. $(3x + 2)(x + 4)$;
 23. $(2x + 1)(2x + 1)$; 25. $(2x - 1)(x - 2)$; 27. $(2x - 3)(x - 3)$; 29. $(3x - 2)(x - 3)$;
 31. $(2x - 3)(2x - 1)$; 33. $(2x - 1)(x + 3)$; 35. $(x + 8)(2x - 1)$; 37. $(2x - 3)(x + 2)$;
 39. $(3x - 2)(x + 3)$

Guía de Estudio No. 7

Pág. 27

1. $R(x) = -35$; 3. $R(x) = 369$; 5. $R(x) = 30$; 7. $R(x) = 0$; 9. No;
 11. Si; 13. No; 15. Si; 17. $(x^2 - x - 6)(x - 1)$;
 19. $(x^2 - x - 4)(x + 1)$; 21. $(x^2 + 2x + 2)(x + 3)$; 23. $(x^2 + x - 2)(x + 1)$; 25. $(x^2 - 2x + 1)(x - 1)$

Guía de Estudio No. 8

Pág. 33

1. $\frac{3b}{2a(x - a)}$; 3. $\frac{2a}{3y}$; 5. $\frac{b^3c}{8(a - b)}$; 7. $\frac{3x + 5}{x - 2}$;
 9. $\frac{x - y}{x + y}$; 11. $\frac{a - 2b}{a^2 + 2ab + 4b^2}$; 13. $\frac{2x + 3}{5x + 1}$; 15. $\frac{a + 2b}{ax(a - 3b)}$;
 17. $\frac{n(n - 1)}{n - 6}$; 19. $\frac{4a}{3x}$; 21. $\frac{x + 5}{2x + 3}$; 23. $\frac{x(4a - 5)}{3a + 2}$

Guía de Estudio No. 9

Pág. 36

1. $\frac{2x^4}{7ay^3}$; 3. $\frac{2x}{3}$; 5. 1; 7. $\frac{n}{(m - n)^2}$;
 9. $\frac{2(2x + 1)}{x + 1}$; 11. $\frac{x - 3}{a - 1}$

Guía de Estudio No. 10

Pág. 36

1. $\frac{an}{m^2}$; 3. 1; 5. $\frac{x + 1}{5x}$; 7. $\frac{1}{3x}$;
 9. $\frac{3x + 1}{4x - 3}$; 11. $\frac{1}{a^2(2a + 1)}$

Guía de Estudio No. 11

Pág. 39

1. $15(x - 2)$; 3. $12x^2y^3(2a + 5)$; 5. $6a^2b(x + 1)(x - 3)$; 7. $18a^2b(x - 2y)^2$;

9. $72x^3y^2(x-5)$; 11. $8x^2(x+3)^2(x-2)^2$; 13. $6x^3(x^2-x+1)(x+1)$

Guía de Estudio No. 12

Pág. 41

1. $\frac{3x-2}{(x+4)(x-3)}$; 3. $\frac{5(x-2)}{(x+5)(x-5)}$; 5. $\frac{-2ax}{(x+3a)(x-3a)}$; 7. $\frac{1}{(x-4)(x-3)}$;
9. $\frac{2(m^2+n^2)}{(m+n)(m-n)}$; 11. $\frac{b^2+2ab-a^2}{ab(a+b)}$; 13. $\frac{1}{x-3}$; 15. $\frac{3a^2-3a+10}{4(a+1)(a-1)}$

Guía de Estudio No. 13

Pág. 43

1. $\frac{5x+1}{(x+3)(x-4)}$; 3. $\frac{x}{(3x-2)(2x-1)}$; 5. $\frac{4x^2+1}{(4x+1)(x-1)}$; 7. $\frac{1}{x+1}$;
9. $\frac{3}{x-1}$; 11. $\frac{4}{2x+5}$; 13. 3; 15. $x-3$;
17. $x(x-1)$; 19. $x(3x-2)$; 21. $(x+6)(x-6)$; 23. $x(x+2)$;
25. $(x+2)(2x-1)$; 27. $(2x+1)(3x-8)$; 29. x ; 31. $\frac{3x-2}{4x+1}$;
33. $\frac{2x+1}{6x-5}$; 35. $\frac{9x+2}{12x+1}$; 37. $x+2$; 39. $\frac{(2x-1)(x-1)}{(2x+5)(x-4)}$

Guía de Estudio No. 14

Pág. 50

1. $y^2\sqrt{x}$; 3. $\sqrt{2x}$; 5. $\sqrt{xy}$; 7. $\sqrt[3]{x+3}$;
9. $\sqrt{x+3y}$; 11. $7x^{4/5}$; 13. $x^{3/4}y^{3/4}$; 15. $x^{1/2}y$;
17. $(x-3)^{3/2}$; 19. $3xy^2\sqrt{x}$; 21. $2xyz^2\sqrt{2yz}$; 23. $4xy^2z^3\sqrt{yz}$;
25. $2xz^3\sqrt{5xy}$; 27. $x^2y^2(x+y)\sqrt{y}$; 29. $-x^2y\sqrt[3]{x}$; 31. $yz^2\sqrt[5]{x^2}$;
33. $-4a^2y^6$; 35. $9x^3y^4z^{10}$

Guía de Estudio No. 15

Pág. 52

1. $5a^2x+7\sqrt{b}-3x\sqrt{a}$; 3. $4b\sqrt{5x}$; 5. $\sqrt[3]{2}$;
7. $8\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}$; 9. $-3xy\sqrt[3]{x}$; 11. $5a^2\sqrt{5a}+3a^2\sqrt{3}+8a^5$

Guía de Estudio No. 16

Pág. 57

1. $2x+4\sqrt{2xy}+3y$; 3. $4x-12\sqrt{xy}+ay$; 5. $6x-8\sqrt{xy}-8y$;
7. $x-4\sqrt{xy}+4y$; 9. $xy-6x\sqrt{y}+9x$; 11. $37-12\sqrt{2x+1}+2x$;
13. $3a+\sqrt{a(a+1)}+1$; 15. $2\sqrt{x(1-x)}+1$; 17. $2x-8\sqrt{x+2}-2$;
19. $5\sqrt{a(a+x)}-6x$; 21. $1+3x^2-4x\sqrt{1-x^2}$

Guía de Estudio No. 17

Pág. 57

1. $\frac{x\sqrt{x} + 2\sqrt{xy}}{2x}$;
3. $\frac{2x\sqrt{xy} + 2y\sqrt{x}}{3xy}$;
5. $\frac{7x\sqrt{6y} - y\sqrt{42x}}{21xy}$;
7. $\frac{6x\sqrt{5y} + 15y\sqrt{2x}}{30xy}$;
9. $\frac{x\sqrt{30y} + 5y\sqrt{6x}}{30xy}$;
11. $\frac{2}{3y}$;
13. $\frac{3x + 8\sqrt{xy} + 4y}{9x - 4y}$;
15. $\frac{6x\sqrt{2} + 3\sqrt{xy} + 12\sqrt{6x} + 6\sqrt{3y}}{24x - 3y}$;
17. $\frac{3x - 2\sqrt{15xy} - 15y}{3x - 5y}$;
19. $\frac{2\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + 2x + \sqrt{xy}}{4x - y}$;
21. $\frac{2a + 3\sqrt{ax} - x}{4a + x}$;
23. $2a - 2\sqrt{a(a+1)} - 1$

Guía de Estudio No. 18

Pág. 62

1. $\left\{\frac{14}{5}\right\}$;
3. $\{1\}$;
5. $\left\{-\frac{7}{4}\right\}$;
7. $\left\{\frac{33}{5}\right\}$;
9. $\left\{\frac{131}{8}\right\}$;
11. $\{-3\}$;
13. $\{-382\}$;
15. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$;
17. $\{-2\}$.

Guía de Estudio No. 19

Pág. 65

1. $P = \frac{A}{rt}$; $r = \frac{A}{Pt}$;
3. $t = \frac{A - P}{Pr}$; $P = \frac{A}{1 + rt}$;
5. $r = \frac{S\ell - a}{S}$; $a = S(\ell - r)$;
7. $g = \frac{2(S - vt)}{t^2}$; $v = \frac{2S - gt}{t^2}$;
9. $t = \frac{14}{c}$;
11. $t = \frac{c - b}{5a}$;
13. $t = \frac{C}{R - L}$;
15. $t = \frac{2r}{r + 3s}$;
17. $t = \frac{v - v_0}{a}$;
19. $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9}(^{\circ}\text{F} - 32)$;
21. $m = \frac{E}{gh + \frac{1}{2}v^2}$;
23. $\alpha = \frac{1}{t}\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)$;
25. $\text{Cos}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Guía de Estudio No. 20

Pág. 67

1. 14 y 20;
3. 16 y 23;
5. 12, 24 y 8;
7. 30, 28 y 36;
9. A = 15 años; B = 5 años;
11. A tiene L. 50.00 y B tiene L. 25.00

Guía de Estudio No. 21

Pág. 71

1. $\{-2, 2\}$;
3. $\{-6, 6\}$;
5. $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$;
7. $\emptyset$;
9. $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;
11. $\{0, -2\}$;
13. $\{0, 3\}$;
15. $\{0, -1\}$;
17. $\left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$;
19. $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$;

Guía de Estudio No. 22 Pág. 75

1. Reales y diferentes; $\{3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\}$; 3. Imaginarias, $\emptyset$ en $\mathbb{R}$;
 5. Reales y diferentes; $\{-2, 5\}$; 7. Imaginarias, $\emptyset$ en $\mathbb{R}$;
 9. Reales y diferentes; $\left\{\frac{5 - \sqrt{89}}{8}, \frac{5 + \sqrt{89}}{8}\right\}$; 11. Reales y diferentes; $\{-3, 4\}$;
 13. Reales y diferentes; $\left\{\frac{15 - \sqrt{449}}{2}, \frac{15 + \sqrt{449}}{2}\right\}$; 15. Reales y diferentes; $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

Guía de Estudio No. 23 Pág. 76

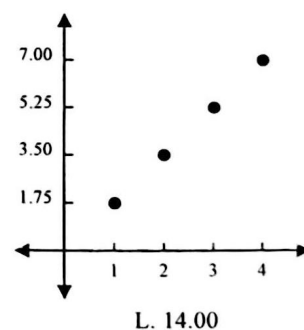
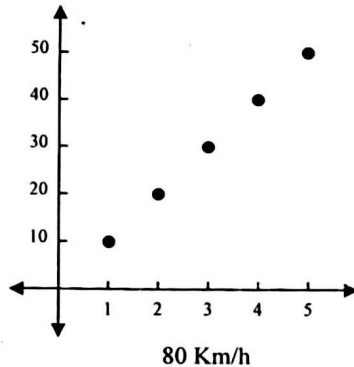
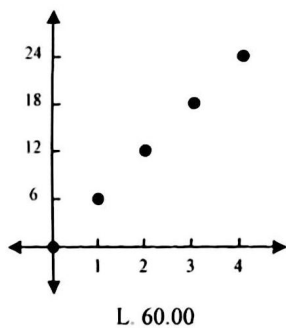
1. $\{2, 8\}$; 3. $\{6, 15\}$; 5. $\left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}$; 7. $\emptyset$; 9. $\{-1, 3\}$;
 11. $\{-1, 5\}$; 13. $\{5\}$; 15. $\{1\}$.

Guía de Estudio No. 24 Pág. 79

1. 14 y 15; 3. Ancho = 7, Largo = 10; 5. A = 14 años, B = 11 años; 7. 4.

Guía de Estudio No. 25 Pág. 87

1. $y = 6x$; 3. $y = 10x$; 5. $y = 1.75x$

**Guía de Estudio No. 26** Pág. 95

1. $d(A,B) = \sqrt{41}$, $M\left(-1, \frac{3}{2}\right)$; 3. $d(R,S) = \sqrt{85}$, $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$; 5. $d(C,D) = a\sqrt{2}$, $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$;
 7. $d(A,B) = \sqrt{50}$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$; 9. $d(R,S) = 9$, $M\left(\frac{1}{2}, 3\right)$; 11. $d(C,D) = 5$, $M\left(-1, \frac{5}{2}\right)$;
 13. $d(R,T) = \sqrt{74}$, $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$; 15. $d(T,W) = \sqrt{34.33}$, $M(2.95, 0.9)$; 17. $d(C,E) = \sqrt{\frac{281}{16}}$, $M\left(\frac{1}{8}, 4\right)$;
 19. $P = 24$; 21. $P = 21.66$; 23. $P = 18.81$;
 25. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$; $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$;

$$27. \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = 36; \quad x^2 + y^2 - x - 8y - \frac{79}{4} = 0;$$

$$29. (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16; \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0;$$

$$31. C(3, 2), r = 4;$$

$$33. C(0, 3), r = 2;$$

$$35. C(0, -2), r = \sqrt{10};$$

$$37. C(-5, 0), r = 5;$$

$$39. C(-1, 4), r = \sqrt{30};$$

$$41. (x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{205}{4}; \quad x^2 + y^2 - 2x - 3y - \frac{192}{4} = 0;$$

$$43. (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10; \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8 = 0;$$

$$45. (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 34; \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0;$$

$$47. \sqrt{26}, \frac{1}{2}\sqrt{89}, \frac{1}{2}\sqrt{53}$$

Guía de Estudio No. 27

Pág. 101

$$1. Iy(0, 4), Ix(2, 0);$$

$$3. Iy(0, 9), Ix(-3, 0);$$

$$5. Iy(0, 6), Ix(2, 0);$$

$$7. Iy(0, -1), Ix\left(\frac{1}{2}, 0\right);$$

$$9. Iy(0, 2), Ix\left(-\frac{2}{3}, 0\right);$$

$$11. m = -1;$$

$$13. m = 1;$$

$$15. m = \frac{17}{9};$$

$$17. m = \frac{85}{133};$$

$$19. m = 0.426;$$

$$21. m = -0.1590$$

Guía de Estudio No. 28

Pág. 106

$$1. y = 2x + 3; \quad 3. y = x + 1; \quad 5. y = 0x + 5; \quad 7. y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}; \quad 9. y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2};$$

$$11. y = 2x - 5, m = 2, b = -5; \quad 13. y = 0x + \frac{5}{3}, m = 0, b = \frac{5}{3}; \quad 15. y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}, m = \frac{4}{3}, b = -\frac{7}{3};$$

$$17. y = 6x + 0, m = 6, b = 0 \quad 19. y = 2x - 2; \quad 21. y = -x - \frac{1}{4};$$

$$23. y = -x + 1; \quad 25. y = \frac{3}{2}x + 0; \quad 27. y = 1.065x - 2.0498$$

Guía de Estudio No. 29

Pág. 113

1. Paralelas;

3. Perpendiculares;

5. Oblicuas;

7. Oblicuas;

9. Perpendiculares;

11. Perpendiculares;

13. Paralelas;

15. Oblicuas;

17. Paralelas;

$$19. a) y = 2x - 8, b) 2x - y - 8 = 0;$$

$$21. a) y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{30}, b) 45x - 30y + 11 = 0;$$

$$23. a) y = -\frac{1}{2}x + 4, b) x + 2y - 8 = 0;$$

$$25. a) y = \frac{2}{5}x - \frac{16}{5}, b) 2x - 5y - 16 = 0;$$

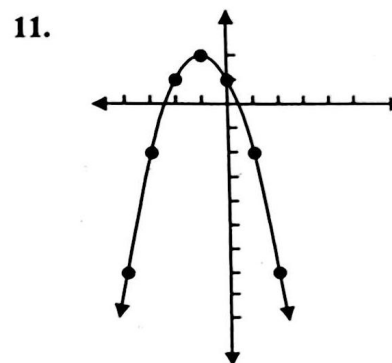
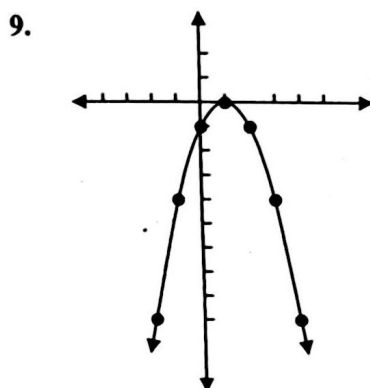
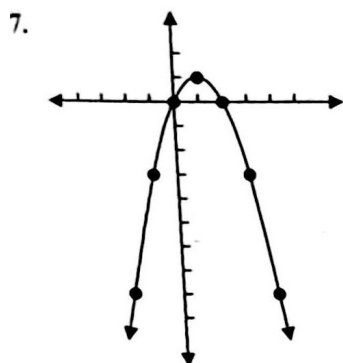
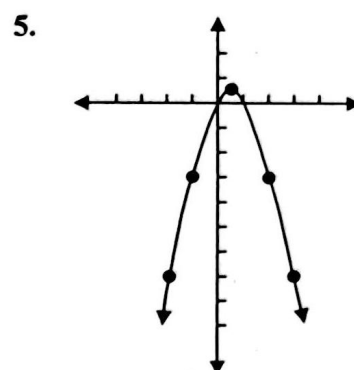
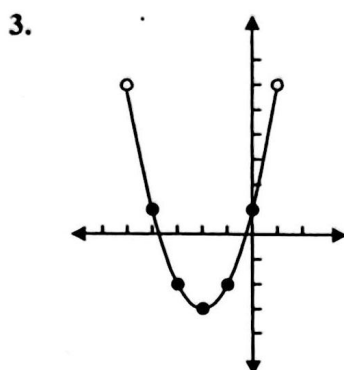
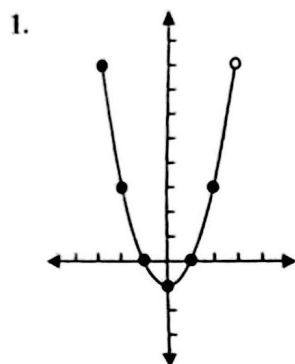
$$27. a) y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, b) 2x - 3y + 4 = 0;$$

$$29. a) y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, b) x - 3y - 1 = 0;$$

$$31. a) y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, b) 2x + 3y - 8 = 0$$

Guía de Estudio No. 30

Pág. 119



Guía de Estudio No. 31

Pág. 119

1. a) $V(-1, -1)$, b) $x = -1$, c) $I_{x_1}(0, 0)$, $I_{x_2}(-2, 0)$, d) $A(-3, 3)$, $B(-4, 8)$, $C(1, 3)$, $D(2, 8)$;
3. a) $V\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, b) $x = \frac{2}{3}$, c) $I_{x_1}(1, 0)$, $I_{x_2}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, d) $I_y(0, 1)$, e) $A(2, 5)$, $B(3, 16)$, $C(-1, 8)$, $D(-2, 21)$;
5. a) $V(1, -4)$, b) $x = 1$, c) $I_{x_1}(3, 0)$, $I_{x_2}(-1, 0)$, d) $I_y(0, -3)$, e) $A(-2, 5)$, $B(-3, 12)$, $C(2, -3)$, $D(4, 5)$;
7. a) $V(-2, 8)$, b) $x = -2$, c) $I_{x_1}(-2 - 2\sqrt{2}, 0)$, $I_{x_2}(-2 + 2\sqrt{2}, 0)$, d) $I_y(0, 4)$, e) $A(-3, 7)$, $B(-4, 4)$, $C(-1, 7)$, $D(1, -1)$;
9. a) $V(2, 1)$, b) $x = 2$, c) $I_{x_1}(1, 0)$, $I_{x_2}(3, 0)$, d) $I_y(0, -3)$, e) $A(-1, -8)$, $B(-2, -15)$, $C(4, -3)$, $D(1, -1)$;
11. a) $V(1, -2)$, b) $x = 1$, c) I_{x_1}, I_{x_2} : no tiene, d) $I_y(0, -4)$, e) $A(-1, -10)$, $B(-2, -20)$, $C(2, -4)$, $D(3, -10)$;
13. a) $V(-2, -3)$, b) $x = -2$, c) I_{x_1}, I_{x_2} : no tiene, d) $I_y(0, -5)$, e) $A\left(-3, -\frac{7}{2}\right)$, $B(-4, -5)$, $C\left(1, -\frac{15}{2}\right)$, $D(2, -11)$; $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $D(2, 4)$;
15. a) $V(-2, -4)$, b) $x = -2$, c) $I_{x_1}(-2 + 2\sqrt{2}, 0)$, $I_{x_2}(-2 - 2\sqrt{2}, 0)$, d) $I_y(0, -2)$, e) $A\left(-3, -\frac{7}{2}\right)$, $B(-4, -2)$, $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $D(2, 4)$;
17. a) $V(3, -4)$, b) $x = 3$, c) I_{x_1}, I_{x_2} : no tiene, d) $I_y(0, -22)$, e) $A(2, -6)$, $B(1, -12)$, $C(4, -6)$, $D(5, -12)$

Guía de Estudio No. 32

Pág. 130

1. x = cantidad líquido A
 y = cantidad líquido B
 $2x$ = el doble de líquido A
 $4y$ = el cuádruple del líquido B
 $2x + 4y = 24$
5. x = número mayor
 y = número menor
 $2x$ = doble del número mayor
 $3y$ = triple del número menor
 $2x - 3y = 4$
9. x = primer número
 y = segundo número
 $\frac{1}{4}x$ = un cuarto del primero
 $\frac{1}{3}y$ = un tercio del segundo
 $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 9$
3. x = precio del café
 y = precio del azúcar
 $6x$ = precio de 6 libras de café
 $5y$ = precio de 5 libras de azúcar
 $6x + 5y = 30$
7. x = primer número
 y = segundo número
 $2x$ = doble del primer número
 $3y$ = triple del segundo número
 $2x = 3y + 9$

Guía de Estudio No. 33

Pág. 133

1. $\{(-3, 2)\}$; 3. $\{(-1, 1)\}$; 5. $\left\{\left(-\frac{9}{2}, 6\right)\right\}$; 7. $\{(5, -6)\}$; 9. $\{(5, 4)\}$;
11. $\{(6, 7)\}$; 13. $\{(1, -2)\}$; 15. $\{(2, 2)\}$; 17. $\{(1, -3)\}$; 19. 8 y 4;
21. 17 y 13; 23. 5 y 17; 25. $\frac{37}{3}$ plg, $\frac{20}{3}$ plg; 27. $62^\circ, 28^\circ$

Guía de Estudio No. 34

Pág. 139

1. C.S. = $\left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right\}$ 3. C.S. = $\{(-1, 5)\}$; 5. C.S. = $\{(3, 3)\}$; 7. C.S. = $\{(-2, 3)\}$;
9. C.S. = $\{(0, 3)\}$; 11. C.S. = $\{(1, -3)\}$; 13. C.S. = $\{(4, 5)\}$; 15. C.S. = $\{(2, 4)\}$;
17. C.S. = $\{(8, 12)\}$; 19. C.S. = $\{(16, 8)\}$; 21. C.S. = $\{(1, -3)\}$

Guía de Estudio No. 35

Pág. 143

No se dan respuestas.

Guía de Estudio No. 36

Pág. 146

1. a) Si, c) No, e) Si;
9. $2,160^\circ$; 11. $5,040^\circ$; 13. $18,000^\circ$; 15. 10; 17. 16;
19. 97; 21. 11; 23. 17; 25. 98
3. 162° c/u; 5. 168° c/u; 7. $178.2^\circ = 178^\circ 12'$

Guía de Estudio No. 37 Pág. 151

1. $P = 216 \text{ cm}$, $A = 1,080 \text{ cm}^2$; 3. $L = 25 \text{ cm}$; 5. 2.46 mm ; 7. 35

Guía de Estudio No. 38 Pág. 151

1. a) $L = 17.54 \text{ cm}$, b) $P = 70.16 \text{ cm}$, c) $A = 307.65 \text{ cm}^2$;
 3. a) $L = 14.17 \text{ dm}$, b) $P = 70.53 \text{ dm}$, c) $A = 345.56 \text{ dm}^2$;
 5. a) $L = 25.30 \text{ plg}$, b) $P = 151.8 \text{ plg}$, c) $A = 1,662.95 \text{ plg}^2$;
 7. a) $L = 15.41 \text{ yds}$, b) $P = 123.31 \text{ yds}$, c) $A = 1,147.16 \text{ yds}^2$;
 9. a) $L = 10.01 \text{ dm}$, b) $P = 100.18 \text{ dm}$, c) $A = 772.22 \text{ dm}^2$

Guía de Estudio No. 39 Pág. 154

No se dan respuestas.

Guía de Estudio No. 40 Pág. 155

No se dan respuestas.

Guía de Estudio No. 41 Pág. 157

1. V; 3. V; 5. V; 7. V; 9. V;
 11. $\overline{ZR}$, $\overline{RT}$, $\overline{WX}$, $\overline{YL}$; 13. $\overline{MN}$; 15. $\widehat{LR}$, $\widehat{RT}$, $\widehat{TY}$, $\widehat{YL}$; 17. ROT

Guía de Estudio No. 42 Pág. 161

1. $77,922.24 \text{ cm}^2$; 3. 763.02 cm^2 ; 5. $84,247.58 \text{ yds}^2$; 7. $94,232.78 \text{ mm}^2$;
 9. 56 cm^2 ; 11. $31,395 \text{ dm}^2$; 13. 127.17 cm^2 ; 15. $21,403.29 \text{ mm}^2$

Guía de Estudio No. 43 Pág. 162

1. 333.12 dm^2 ; 3. 314 m^2 ; 5. 8.0887 m^2 ; 7. 640.30 cm^2 ;
 9. $L = 134,786.64$; 11. 21.5 cm^2

Guía de Estudio No. 44 Pág. 163

1. 24 cm , 75.36 cm , 452.16 cm^2 ; 3. 50 cm , 100 cm , $7,850 \text{ cm}^2$; 5. 196.83 m^2 ;
 7. 19.625 m^2 ; 9. 35.24 m^2

Guía de Estudio No. 45 Pág. 172

1. V; 3. F; 5. F; 7. V; 9. F;
 11. $A_L = 432 \text{ cm}^2$, $A_T = 482 \text{ cm}^2$, $V = 450 \text{ cm}^3$;
 13. $A_L = 1,344 \text{ dm}^2$, $A_T = 1,565.70 \text{ dm}^2$, $V = 3,103.83 \text{ dm}^3$;
 15. $A_L = 900 \text{ dm}^2$, $A_T = 1,200 \text{ dm}^2$, $V = 2,700 \text{ dm}^3$;
 17. $A_L = 6,048 \text{ plg}^2$, $A_T = 10,248 \text{ plg}^2$, $V = 75,600 \text{ plg}^3$;
 19. $A_L = 660 \text{ cm}^2$, $A_T = 960 \text{ cm}^2$, $V = 5,400 \text{ cm}^3$;
 21. $A_L = 480 \text{ cm}^2$, $A_T = 640 \text{ cm}^2$, $V = 2,400 \text{ cm}^3$; 23. b;
 25. AB, BC, CD, DE, AE ; 27. $\Delta FBC, \Delta FAB, \Delta FAE, \Delta FDE, \Delta FDC$;

29. $\overline{EF}, \overline{HG}, \overline{IJ}, \overline{LK}, \overline{AB}, \overline{DC}$;33. $\overline{EFGH}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$;

31. La misma;

35. $\triangle DHE$;

37. 5;

39. 6;

41. $\overline{BH}, \overline{AG}, \overline{CE}, \overline{DF}$

Guía de Estudio No. 46

Pág. 174

1. 24 cm^3 ;3. 64.6 cm^3 ;

5. 2 cubos;

7. 42 cubos;

9. $60 \mu^3$;11. $748.25 \mu^3$;13. 102 cm^3 ;15. $26.67 \mu^3$;17. $4,583.33 \mu^3$;19. $5,985.97 \mu^3$

Guía de Estudio No. 47

Pág. 181

1. V;

3. V;

5. V;

7. F;

9. F;

11. a) $A_L = 678.59 \text{ cm}^2$, b) $A_T = 1,130.98 \text{ cm}^2$, c) $V = 2,261.95 \text{ cm}^3$;13. a) $A_L = 339.29 \text{ plg}^2$, b) $A_T = 452.39 \text{ plg}^2$, c) $V = 577.55 \text{ plg}^3$;15. a) $A_L = 263.89 \text{ dm}^2$, b) $A_T = 316.67 \text{ dm}^2$, c) $V = 308.49 \text{ dm}^3$;17. a) $A_L = 1,507.97 \text{ cm}^2$, b) $A_T = 2,412.75 \text{ cm}^2$, c) $V = 9,047.81 \text{ cm}^3$;19. a) $A_L = 271.43 \text{ plg}^2$, b) $A_T = 307.63 \text{ plg}^2$, c) $V = 325.72 \text{ plg}^3$;21. $A = 2,412.75 \mu^2$, $V = 9,047.81 \mu^3$;23. $A = 942.48 \mu^2$, $V = 1,963.50 \mu^3$;25. 197.80 yds^3 ;27. a) $A = 669.66 \text{ m}^2$, b) $V = 1,629.51 \text{ m}^3$;29. a) $A = 232.35 \text{ cm}^2$, b) $V = 333.04 \text{ cm}^3$;31. a) $A = 14.66 \text{ plg}^2$, b) $V = 5.28 \text{ plg}^3$;33. $V = 9,843.68 \mu^3$;35. $V = 716.28 \mu^3$

BIBLIOGRAFIA

TITULO DE LA OBRA	AUTOR (ES)	EDITORIAL
Álgebra	Lovaglia - Elmor - Comay	Harla. México, 1989
Álgebra	A. Baldor	Cultural S.A. España 1983
Álgebra Elemental	Gordon - Fuller	CECSA. México, 1988
Álgebra y Trigonometría	Max A. Sobbel	Prentice Hall Hispanoamericana. México, 2000
Álgebra Moderna y Trigonometría I y II	Dolciani – Berman – Wooton	Pulic. Cultural S.A. México, 1987
Álgebra y Trigonometría	Dennis G. Zill	Mc Graw Hill. México, 2001
Álgebra y Trigonometría	Arthur Goodman	Prentice Hall Hispanoamericana. México, 2001.
Aritmética Teórico – Práctica	A. Baldor	Cultural S.A. España, 1983
Fundamentos de Matemática	Richardson	CECSA. México, 1987
Geometría y Trigonometría	A. Baldor	Cultural S.A. España, 1988
Geometría Moderna	Moise – Downs	CECSA. México, 1985
Geometría, Tomo IV	Eichols O'Daffer	NORMA. Colombia, 1982
Geometría	Clemens – O'Daffer – Cooney	Adisson Wesley Iberoamericano. México 1998.
Matemática I, II, III	Juan Casulleras	ANAYA. España, 1988
Matemática Moderna Estructurada	Gómez – Will – Londoño – Guarín	NORMA. Colombia, 1988
Precálculo	Michael Sullivan	Pearson Education. México, 2001

Thyridopteryx

Dalmanella rhynchon

IVX²

[Redacted text block]

3°

[Redacted text block]

[Redacted text block]